

ATAMAN Magdalena¹
SZCZEŚNIAK Waclaw²

Wybrane zadania dynamiki analitycznej z zastosowaniem prawa zachowania momentu pędu. Część I

*mechanika teoretyczna i analityczna,
pęd, moment pędu (kręt), równania ruchu układów*

Streszczenie

W referacie rozwiązano kilka trudniejszych zadań, których rozwiązania opierają się na podstawowym prawie dynamiki klasycznej, jakim jest prawo zachowania momentu pędu. Podano rozwiązania tych zadań, a wyniki rozwiązań szczegółowo przeanalizowano.

SOLUTION OF SELECTED PROBLEMS OF THE ANALYTICAL DYNAMICS USING LAWS OF CONSERVATION OF MOMENTUM AND MOMENT OF MOMENTUM. PART I

Abstract

In the paper some difficult problems, which solutions are based on a basic law of classical dynamics, which is the law of conservation of moment of momentum are solved. The detailed solutions of the problems are presented and the results are analysed.

1. WSTĘP

Prawa zachowania pędu, momentu pędu (krętu), energii kinetycznej i energii mechanicznej stanowią podstawę teoretyczną mechaniki ogólnej i technicznej. W referacie podano rozwiązania kilku trudniejszych zadań z dynamiki teoretycznej, w których wykorzystuje się prawo zachowania momentu pędu.

2. ZASTOSOWANIE PRAWA ZACHOWANIA KRĘTU W RUCHU ZŁOŻONYM

2.1 Przykład 1

Niech w cienkim zamocowanym do podłoża cylindrze o promieniu $R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ i o idealnie gładkiej wewnętrznej powierzchni znajduje się belka AB o długości $2a$ i masie całkowitej m . Punkt materialny również o masie całkowitej m znajduje się początkowo w środku belki O_1 na przecięciu z pionową średnicą cylindra jak na rysunku 1. W pewnej chwili punktowi materialnemu m nadano stałą prędkość poziomą v względem belki w kierunku punktu końcowego belki B. Belka zaczyna się obracać podczas ruchu punktu. Należy wyznaczyć kąt obrotu belki φ w funkcji czasu t . Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 1 kręt układu belka – punkt materialny, obliczany względem środka cylindra O musi być równy zero. Masowy moment bezwładności układu względem środkowego punktu cylindra O wynosi:

$$l = 2a, \quad R = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad J_o = \frac{m 2a^2}{12} + m \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 + m v^2 t^2 + m \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2. \quad (1)$$

Kręt układu obliczony względem środka cylindra O oraz prędkość kątowna belki wynoszą:

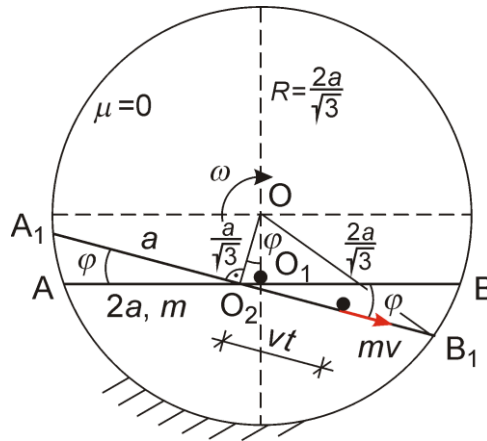
$$K = J_o \omega = m v \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \omega = \frac{v a}{a^2 + v^2 t^2 \sqrt{3}}. \quad (2)$$

Wykorzystując definicję prędkości kątowej ω mamy:

¹Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl

²Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl

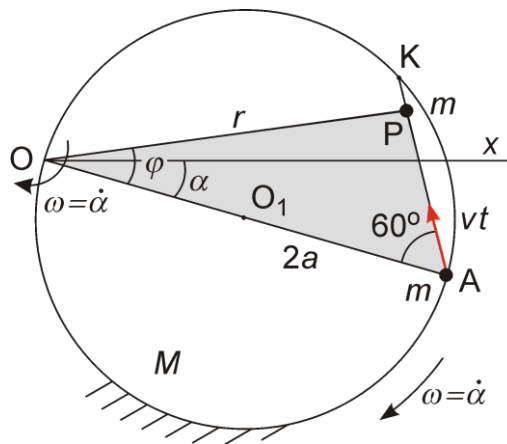
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow d\varphi = \omega dt, \quad \varphi = \int_0^t \omega d\tau = \int_0^t \frac{va}{a^2 + v^2 \tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{vt}{a} \right). \quad (3)$$



Rys.1. Schemat dynamiczny zadania 1

2.2 Przykład 2

Jednorodny, sztywny, gładki krążek o masie całkowitej M i o średnicy $2a$ leży na gładkim, poziomym stole. W punkcie O na obwodzie krążka znajduje się przegub łączący punkt O ze stołem. Krążek może się swobodnie obracać dookoła przegubu O . Punkt materialny o masie m początkowo znajdował się na drugim końcu poziomej średnicy OA w punkcie A . W pewnej chwili punkt materialny zaczął poruszać się ze stałą prędkością v względem krążka po jego cięciwie tworzącej ze średnicą zadany kąt $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$, jak na rysunku 2. O jaki kąt α obróci się krążek dookoła przegubu O w czasie kiedy punkt materialny przebędzie całą długość cięciwy i znajdzie się znów na obwodzie krążka w punkcie K ? Jaka będzie prędkość kątowna w tym krańcowym położeniu punktu materialnego m ?



Rys 2. Schemat dynamiczny zadania 2

Zgodnie z rysunkiem 2 mamy: $OP = r$, $AP = vt$ zaś z twierdzenia cosinusów wynika:

$$r^2 = 4a^2 + v^2 t^2 - 2 \times 2avt \cos \frac{\pi}{3}, \quad r^2 = 4a^2 + v^2 t^2 - 2avt. \quad (4)$$

Na rysunku 2 przyjęto, że w chwili początkowej średnica OA leżała na osi x , następnie zgodnie z prawem zachowania krętu obróciła się przeciwnie do kierunku wektora prędkości punktu materialnego o kąt α w dół. Ruchomy punkt materialny m w aktualnym, pośrednim położeniu znajduje się w punkcie P , jak na rysunku 2. Zapisując teraz kręt układu względem przegubu O , z wykorzystaniem (4), otrzymujemy równanie:

$$M \left(\frac{1}{2} a^2 + a^2 \right) \dot{\alpha} - m r^2 \dot{\phi} - \dot{\alpha} = 0, \quad M \frac{3}{2} a^2 \dot{\alpha} + m r^2 \dot{\alpha} = m r^2 \dot{\phi},$$

$$M \frac{3}{2} a^2 \dot{\alpha} + m (4a^2 + v^2 t^2 - 2avt) \dot{\alpha} = r^2 \dot{\phi}. \quad (5)$$

W kinematyce punktu podaje się definicję prędkości sektorowej $\vec{v}_A = \vec{r} \times \vec{v}$ oraz $v_A = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt}$. Wykorzystując ostatni wzór możemy wyznaczyć ostatni składnik w (5)₃ tzn. składnik $r^2 \dot{\phi}$. Mamy zatem:

$$r^2 \dot{\phi} = 2 \frac{d}{dt} (\text{sektorowe pole zakreślone przez zmienny promień } r) =$$

$$= 2 \frac{d}{dt} \Delta AOP = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} vt 2a \sin \frac{\pi}{3} \right) = av \sqrt{3}. \quad (6)$$

Wstawiając teraz ostatni ze składników (6) do (5)₃, po prostym uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\dot{\alpha} \left[M \frac{3}{2} a^2 + m (4a^2 + v^2 t^2 - 2avt) \right] = mavt \sqrt{3}, \quad \omega = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{mav \sqrt{3}}{\frac{3}{2} M a^2 + m (4a^2 + v^2 t^2 - 2avt)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = mav \sqrt{3} \int_0^{\frac{a}{v}} \frac{dt}{\frac{3}{2} M a^2 + m (4a^2 + v^2 t^2 - 2avt)} =$$

$$= m \frac{a \sqrt{3}}{v} \int_0^{\frac{a}{v}} \frac{dt}{m \left(t - \frac{a}{v} \right)^2 + \frac{3a^2}{v^2} \left(m + \frac{M}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{2+\kappa}} \operatorname{tg}^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{2+\kappa}} \right], \quad M = \kappa m. \quad (7)$$

Granica całkowania w (7) wynika z długości cięciwy, która wynosi a przy kącie $\frac{\pi}{3}$, zatem górna granica całkowania jest równa $\frac{v}{a}$. W szczególnym przypadku $M = m$, $\kappa = 1$ z rozwiązania całki (7) otrzymujemy:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}^{-1} \left[\sqrt{\frac{2}{9}} \right] = 0,3597 = 20,61^\circ. \quad (8)$$

W zakończeniu określimy jeszcze, zgodnie z drugim poleceniem w treści zadania, prędkość kątową krążka w przypadku końcowego położenia punktu materialnego m na cięciwie. Wykorzystując (7)₂, przy $vt = a$ mamy:

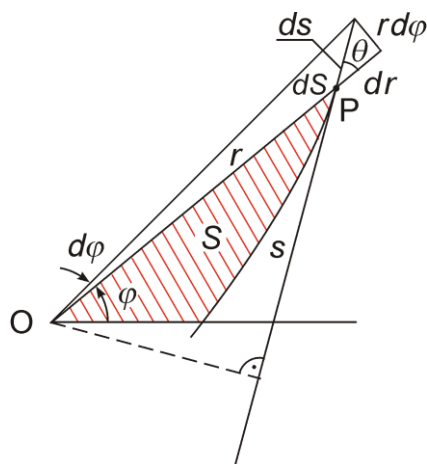
$$\omega = \dot{\alpha} \Big|_{vt=a} = \frac{mav \sqrt{3}}{\frac{3}{2} M (2a^2 + 3ma^2)} = \frac{2v \sqrt{3}}{3a (\kappa + 2)}. \quad (9)$$

* * *

W powyższym i innych zadaniach następnego referatu wystąpiło pojęcie prędkości sektorowej albo wycinkowej. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 3, niech współrzędne biegunowe r i ϕ określają ruch punktu P na płaszczyźnie w czasie t , a S niech oznacza szare pole wycinka. Jeśli przez θ określimy kąt pomiędzy styczną do krzywej w punkcie P a wektorem \vec{r} , to możemy napisać następujące związki:

$$dr = ds \cos \theta, \quad r d\phi = ds \sin \theta, \quad dS = \frac{1}{2} r ds \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 d\phi,$$

$$d = r \sin \theta, \quad v_{\text{sek.}} = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} r \sin \theta = \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} d. \quad (10)$$



Rys.3. Idea prędkości sektorowej (wycinkowej)

Jeśli zauważymy, że wielkość $\frac{1}{2} \frac{ds}{dt} r \sin \theta$ jest równa połowie prędkości $\frac{ds}{dt}$ pomnożonej przez prostopadły do niej odcinek $d = r \sin \theta$, to możemy powiedzieć, że prędkość wycinkowa jest równa połowie momentu prędkości punktu P względem bieguna O.

3. WNIOSKI

W pierwszej części pracy podano rozwiązania dwóch trudniejszych zadań z dynamiki analitycznej, w których wykorzystano prawo zachowania momentu pędu i pojęcie prędkości sektorowej. Podobne zadania, bez rozwiązań, można znaleźć w podręcznikach [5-10], przeznaczonych dla studentów fizyki teoretycznej uniwersytetów angielskich z przełomu XIX i XX wieku.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OW PW, Warszawa 2007.
- [2] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OW PW, Warszawa 2010.
- [3] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>>*. OW PW, Warszawa 2010.
- [4] Timoshenko S.P., Young D.H.: *Engineering Mechanics. Statics, Dynamics*. McGraw-Hill Company, New York 1937, 1940, 1951, 1956.
- [5] Routh E.: *Dynamics of System of Rigid Bodies*. Part I and II. MacMillan, London 1905.
- [6] Routh E.: *A Treatise on Dynamics of a Particle*. Cambridge at the University Press 1898.
- [7] Webster A.G.: *The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies*. Leipzig, Teubner 1912.
- [8] Smart E.H.: *Advanced Dynamics*. Vol. I and II. MacMillan, London 1951.
- [9] Ziwet A.: *Elements of Theoretical Mechanics*. MacMillan, New York 1904.
- [10] Love A.E.H.: *Theoretical mechanics*. Cambridge at the University Press 1921.
- [11] Szcześniak W.: *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Kinematyka 2011, Statyka 2008, Dynamika 1997*, Warszawa OW PW.