

Wacław SZCZEŚNIAK¹
Magdalena ATAMAN¹

DRGANIA WŁASNE ZŁOŻONYCH UKŁADÓW SZTYWNYCH

W pracy przeanalizowano drżania własne trzech złożonych układów sztywnych. Rozważano nieodkształcalną deskę, na której ustawiono kolejno: kulę, krążek i obręcz. Zarówno obręcz jak i krążek oraz kula są niejednorodne. W zadaniu założono brak poślizgu między elementami ustawionymi na desce a deską, natomiast między deską a podłożem przyjęto brak tarcia. Równania ruchu analizowanych układów wyprowadzono metodą energetyczną, a następnie rozwiązano przy użyciu pakietu Mathematica. We wszystkich trzech przypadkach rozwiązano nieliniowe równania różniczkowe i porównano z wynikami otrzymanymi po zlinearyzowaniu tych równań. Rozwiązania zilustrowano wykresami.

NATURAL VIBRATIONS OF COMPLEX RIGID SYSTEMS

In the paper natural vibrations of three complex rigid systems are considered. In the first case the system consists of board and non-homogenous sphere. Next we consider non-homogenous roller on the board. The last one system consists of the board and non-homogenous hoop. Solving these problems we assume that the board is placed on the ideal smooth, horizontal floor and the hoop, the roller, the sphere are rolling on the board without skidding. Equations of motion of these systems are derived using energetic method and solved using Mathematica. Solutions of nonlinear equations of motion and linear form of these equations are compared. Some figures illustrate solutions of the problems.

1. WSTĘP

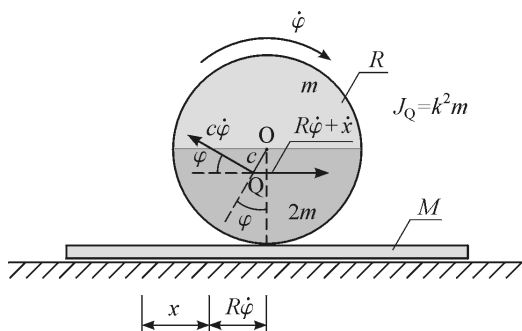
W pracy analizujemy drżania własne trzech złożonych układów sztywnych. Rozważamy nieodkształcalną deskę, na której ustawiono kolejno: obręcz, krążek i kulę. Zarówno obręcz jak i krążek oraz kula są niejednorodne. W zadaniu zakładamy brak poślizgu między elementami ustawionymi na desce a deską, natomiast między deską a podłożem jest brak tarcia. Równania ruchu analizowanych układów wyprowadzimy metodą energetyczną, a następnie rozwiążemy przy użyciu pakietu Mathematica. We wszystkich

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

trzech przypadkach rozwiążemy nieliniowe różniczkowe równania ruchu i porównamy z wynikami otrzymanymi po zlinearyzowaniu tych równań.

2. DRGANIA WŁASNE UKŁADU ZŁOŻONEGO Z NIEJEDNORODNEJ KULI I DESKI

W pierwszej kolejności przeanalizujemy układ składający się z niejednorodnej kuli o masie całkowitej $3m$ i promieniu R , umieszczonej na desce o masie M . Deskę wraz z kulą ustawiono na doskonale gładkiej, poziomej powierzchni. Założymy przy tym, że między kulą a deską nie ma poślizgu. Schemat dynamiczny zadania przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Schemat dynamiczny zadania

Położenie deski opisuje współrzędna x , natomiast obrót kuli względem deski opisuje kąt φ . Prędkość deski \dot{x} w funkcji kąta φ oraz jego pochodnej $\dot{\varphi}$, na podstawie zasady zachowania pędu, zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 1, jest równa

$$\dot{x} = -\frac{3m\dot{\varphi}(R - c \cos \varphi)}{M + 3m}. \quad (1)$$

Energia potencjalna V i kinetyczna E_k analizowanego układu w polu grawitacyjnym ziemskim są zgodne z następującymi wzorami:

$$V = 3mgc(1 - \cos \varphi),$$

$$E_k = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}3m\left[(R\dot{\varphi} + \dot{x} - c\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (c\dot{\varphi}\sin\varphi)^2\right] + \frac{1}{2}3mk^2\dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

We wzorze (2)₂ uwzględniono biegunowy moment bezwładności niejednorodnej kuli względem punktu Q jak na rysunku 1 $J_Q = k^2 m$.

Po uwzględnieniu zależności (1) między współzrędnymi \dot{x} a φ i $\dot{\varphi}$ wyrażenie na energię kinetyczną w funkcji kąta φ oraz jego pochodnej $\dot{\varphi}$ ma postać

$$E_k = \frac{3}{2} m k^2 \dot{\varphi}^2 + 3m \dot{\varphi}^2 \left[\frac{M}{M+3m} (R - c \cos \varphi)^2 + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{2} \right]. \quad (3)$$

Zapisując prawo zachowania energii mechanicznej

$$\frac{d}{dt} (E_k + V) = 0, \quad (4)$$

otrzymujemy następujące równanie ruchu układu kula – deska

$$m\dot{\varphi} \left\{ k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \left[\frac{M}{M+3m} (R - c \cos \varphi)^2 + \frac{c^2 \sin^2 \varphi}{2} \right] + \right. \\ \left. + \dot{\varphi} \left[\frac{M}{M+3m} (R - c \cos \varphi) 2 \dot{\varphi} \sin \varphi + c^2 \dot{\varphi} 2 \sin \varphi \cos \varphi \right] + g c \sin \varphi \right\} = 0. \quad (5)$$

Ponieważ prędkość $\dot{\varphi}$ jest różna od zera w dowolnej chwili, to wyrażenie w nawiasie, w równaniu (5) musi być równe zeru.

Równanie ruchu (5) jest nieliniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu ze względu na zmienną φ . Po zlinearyzowaniu ulega ono znacznemu uproszczeniu i można zapisać je w następującej postaci

$$\ddot{\varphi} + \frac{g c}{\frac{M}{M+3m} (R - c)^2 + k^2} \varphi = 0. \quad (6)$$

W celu określenia wpływu nieliniowości na wyniki zadania oba powyższe równania ruchu rozwiązano przy pomocy programu Mathematica.

3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

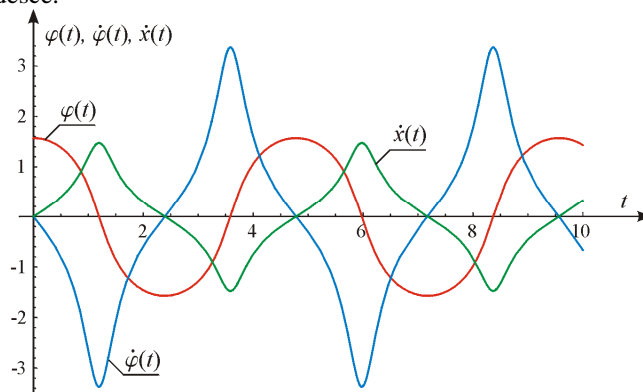
W rozwiązywanym przykładzie przyjęto, że masa górnej, jednorodnej półkuli wynosi m , a dolnej, również jednorodnej półkuli, jest równa $2m$. Środek ciężkości każdej półkuli oddalony jest od środka geometrycznego kuli o $\frac{3}{8}R$, zatem środek masy kuli niejednorodnej przesunięty jest w dół o wielkość $c = \frac{1}{8}R$. Masowy, biegunowy moment bezwładności analizowanej kuli względem jej środka ciężkości wynosi $J_Q = \frac{369}{320} mR^2$, a

zatem współczynnik $k = \sqrt{\frac{J_0}{3m}}$ jest równy $k = R \sqrt{\frac{369}{320}}$. Promień kuli przyjęto $R = 1\text{ m}$, a przyspieszenie ziemskie $g = 9,81\text{ m/s}^2$.

W przypadku zadania nieliniowego (duże drgania) założono następujące warunki początkowe: $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ oraz $\dot{\varphi}(0) = 0$, natomiast po zlinearyzowaniu równania ruchu

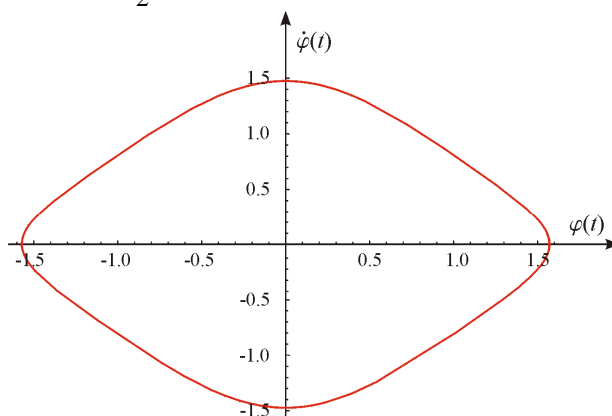
układu kula – deska (małe drgania) przyjęto, że $\varphi(0) = \frac{\pi}{20}$, a $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Korzystając z rozwiązań równań ruchu (5) i (6) wykonano wykresy odpowiadające dużym drganiom (rysunki 2-6) i małym drganiom (rysunki 7-8) niejednorodnej kuli ustawionej na desce.



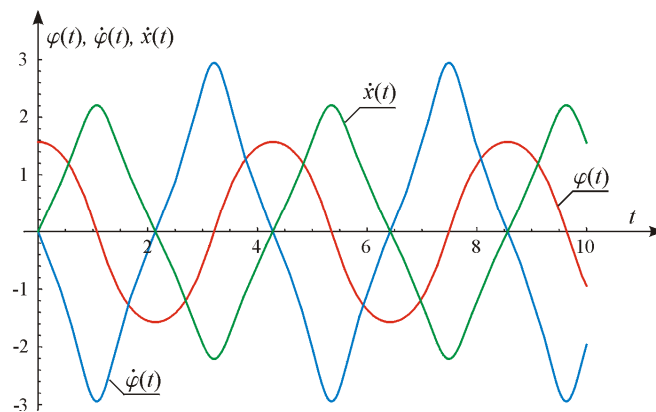
Rys. 2. Wykresy $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ i $\dot{x}(t)$ w przypadku dużych drgań swobodnych układu:

$$m = 100, M = 300, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}(0) = 0$$



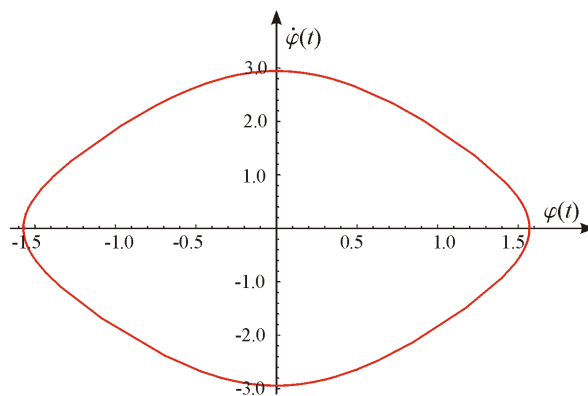
Rys. 3. Portret fazowy $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ w przypadku dużych drgań swobodnych układu:

$$m = 100, M = 300, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}(0) = 0$$



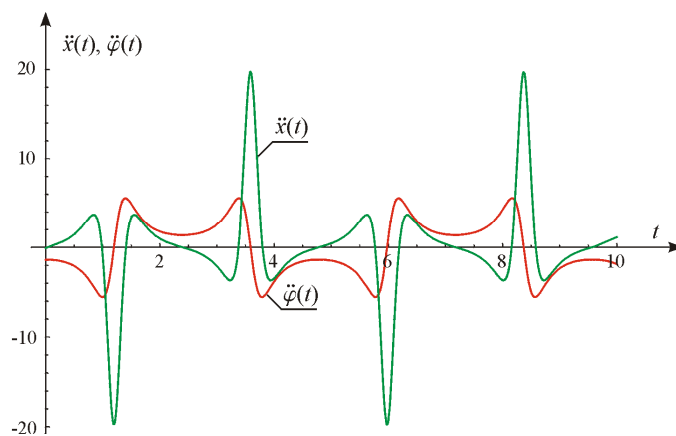
Rys. 4. Wykresy $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ i $\dot{x}(t)$ w przypadku dużych drgań swobodnych układu:

$$m = 100, M = 50, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}(0) = 0$$

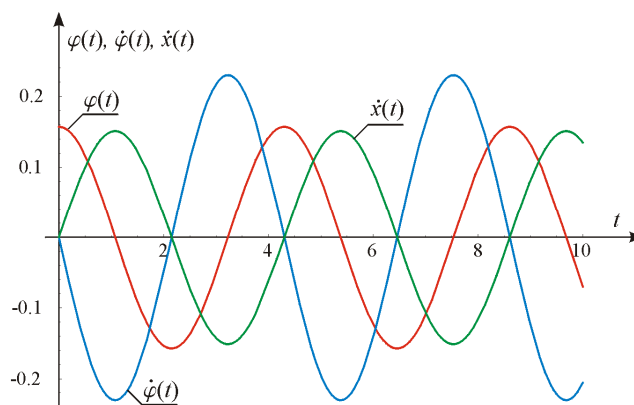


Rys. 5. Portret fazowy $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ w przypadku dużych drgań swobodnych układu:

$$m = 100, M = 50, \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \dot{\varphi}(0) = 0$$

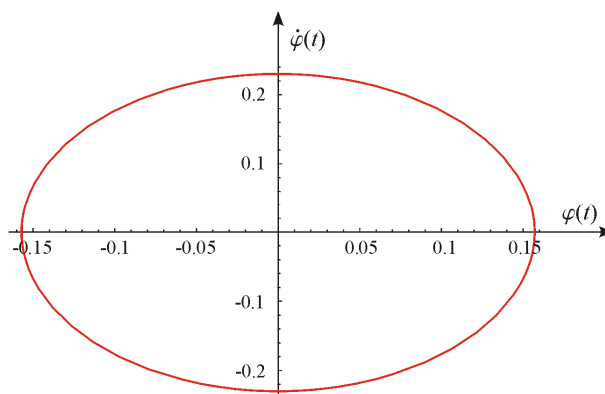


Rys. 6. Wykresy przyspieszeń $\ddot{x}(t)$ i $\ddot{\varphi}(t)$ przy $m=100$, $M=300$, $\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$, $\dot{\varphi}(0)=0$



Rys. 7. Wykresy $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ i $\dot{x}(t)$ w przypadku małych drgań swobodnych układu:

$$m=100, M=100, \varphi(0)=\frac{\pi}{20}, \dot{\varphi}(0)=0$$



Rys. 8. Portret fazowy $\varphi(t)$ i $\dot{\varphi}(t)$ w przypadku małych drgań swobodnych układu:

$$m = 100, \quad M = 100, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{20}, \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

4. DRGANIA WŁASNE UKŁADÓW ZŁOŻONYCH Z NIEJEDNORODNEGO KRAŻKA I DESKI ORAZ OBRĘCZY I DESKI

W przypadku krążka o masie górnej połowy m i dolnej połowy $2m$ oraz o promieniu R , wielkość $c = \frac{R}{4\pi}$. Lokalne środki mas obu połówek są oddalone od środka geometrycznego krążka o $\frac{3R}{4\pi}$. Biegunowe momenty bezwładności obu połówek względem ich lokalnych środków mas wynoszą odpowiednio:

$$J_{C_1} = \frac{mR^2}{18\pi^2} (9\pi^2 - 32), \quad J_{C_2} = \frac{2mR^2}{18\pi^2} (9\pi^2 - 32). \quad (7)$$

Biegunowy moment bezwładności obu połówek względem osi prostopadłej do środka masy krążka oraz współczynnik k są określone wzorami:

$$J_Q = \frac{mR^2}{6\pi^2} (9\pi^2 - 23), \quad k = \frac{R}{3\pi} \sqrt{\frac{1}{6}(9\pi^2 - 23)}. \quad (8)$$

Analogicznie w przypadku obręczy o masie górnej połowy m i dolnej połowy $2m$ oraz o promieniu R , odpowiednie wzory są następujące:

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{2R}{3\pi}, & J_{c_1} &= mR^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), & J_{c_2} &= 2mR^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right), \\
 J_Q &= \frac{mR^2}{9\pi^2} (27\pi^2 - 92), & k &= \frac{R}{9\pi} \sqrt{27\pi^2 - 92}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

5. WNIOSKI

W pracy przeanalizowano drgania własne trzech złożonych układów sztywnych. Rozważano nieodkształcalną deskę leżącą na gładkim, sztywnym podłożu, na której ustawiono kolejno niejednorodnie: kulę, krążek i obręcz.

Rozwiązanie nieliniowych równań ruchu analizowanych układów przy dużych wychyleniach różni się od rozwiązań zlinearyzowanych równań ruchu przy narzuconych warunkach początkowych $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$ (zadanie nieliniowe) oraz $\varphi(0) = \frac{\pi}{20}$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$ (zadanie liniowe). Zaobserwowano również znaczący wpływ masy deski, przy zadanej masie kuli, na przebiegi drgań.

6. LITERATURA

- [1] Smart E.H.: *Advanced Dynamics, Vol. I and Vol. II. Macmillan and CO., Limited London 1951.*
- [2] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>> w zadaniach i przykładach obliczeniowych. OWPW, Warszawa 2010.*
- [3] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych. OWPW, Warszawa 2007.*
- [4] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych. OWPW, Warszawa 2010.*
- [5] Jakowlew I.A. (ed.): *Sbornik zadacz po obszczemu kursu fizyki. Mechanika. Nauka, Moskwa 1977.*
- [6] Piatnickij E.S., Truchan N.M., Chanukajew Ju.I., Jakowienko G.N.: *Sbornik zadacz po analiticzeskoj mechanike. Nauka-Fizmatlit, Moskwa 1980 i 1996.*
- [7] Mieszczerski I.W.: *Sbornik zadacz po teoreticzeskoj mechanike. GRF-ML, Nauka, Moskwa 1914-1986. (36 wydań).*
- [8] Karelitz G.B., Ormondroyd J., Garreltz J.M.: *Problems in mechanics. Based on the orginal collection of I.V. Mestchersky. The MacMillan Company, New York 1939.*
- [9] Neuber H.: *Lösungen zur Aufgabensammlung Mestcherski. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.*
- [10] Szcześniak W., Ataman M.: *Zastosowanie pakietu Mathematica w mechanice analitycznej. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 1(17), Radom 2003, str. 617-626.*