TRANSCOMP – XIV INTERNATIONAL CONFERENCE
COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCE, INDUSTRY AND TRANSPORT

*Complexity, characteristic semi-group of automaton,
determined analog of automaton extension,
direct product, isomorphism*

Stanisław BOCIAN[1]

ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ ILOCZYNU PROSTEGO AUTOMATÓW ASYNCHRONICZNYCH SILNIE SPÓJNYCH USTALONYCH ANALOGÓW ROZSZERZEŃ ZWIĄZANYCH Z IZOMORFIZMAMI

Półgrupa charakterystyczna automatu ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczenie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności obliczeniowej uogólnionych homomorfizmów dla innych klas automatów. W zakresie modelu matematycznego koncepcja ustalonego analogu rozszerzenia automatu A związanego z izomorfizmami $g^{0,}$ g^{1},..., g^{q-1}, gdzie q stopień rozszerzenia, przy odpowiednich założeniach symuluje automat zmienny w czasie. Automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem matematycznym dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Automaty te symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie. Iloczyn prosty automatów można uważać za realizację – odpowiednio równoległych obliczeń .

COMPLEXITY OF THE CHARACTERISTIC SEMI-GROUP OF THE ASYNCHRONOUS AUTOMATONS DIRECT PRODUCT OF THE STRONGLY CONNECTED DETERMINED ANALOGS, EXTENSIONS ASSOCIATED WITH ISOMORPHISMS

The characteristic semi-group of the automaton interferes in the computational algorithm of the generalized homeomorphisms of the automatons. Then determination the complexity of the characteristic semi-group enables to estimate the complexity of the computational generalized homeomorphisms for the other classes of automatons.

In the range of the mathematical model the conception of the determined analog of the extension of the automaton A associated with the isomorphisms g^0, g^1, …g^{q-1}, where q is the grade of the extensions, with the suitable assumptions it simulates the automaton variable in time. The variable automaton in time is the adequate mathematical model for the many technical and computational processes of the real time. The direct product of automatons can be considered as the realization – parallel calculations accordingly.

[1] Stanisław BOCIAN Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR" POLSKA; Poznań 61-055;Warszawska 181. Telefon: + 48 (0)61 664 14 38; E-mail: Elektrotechnika @ tabor.com.pl

1. ROZWAŻANIA WPROWADZAJĄCE

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki że $a\ R\ b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja f jest $1-1$ (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkcja jest „na ", gdy

$$Y = \{\ b : b = f(a), a \in X\ \}.$$

Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną (S $\circ$) gdzie: S niepusty zbiór, ($\circ$) operacja binarna na zbiorze stanów S. Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $S \times S$ w zbiór S. Binarną operacją ($\circ$) na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla wszystkich $a, b, c \in S$.

Półgrupa, to taki grupoid (S, $\circ$), w którym operacja ($\circ$) jest asocjatywna. Niech $\sum$ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór $\sum$ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem x w alfabecie $\sum$ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu, napisanych obok siebie, a długość słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter σ.

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywam uporządkowaną trójkę (S, $\sum$, M), gdzie:

S – jest skończonym, niepustym zbiorem stanów,

$\sum$ – jest skończonym, niepustym zbiorem wejść,

$M: \ S \times \sum \ \rightarrow \ S$ jest funkcją przejść.

Symbolem $\sum^+$ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru $\sum$. Zbiór $\sum^+$ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegającą na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbole $\sum^*$ oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\sum^* = \sum^+ \cup \lambda$, gdzie λ jest ciągiem pustym.

Funkcję M rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \sum^+$ w następujący sposób: niech $M(s, x)$ będzie zdefiniowane, wtedy:

$$M(s, x\sigma) = M\ (M\ (s, x), \sigma) \text{ dla każdego } s \in S,\ x \in \sum^+, \sigma \in \sum.$$

Na zbiorze $\sum^*$ zdefiniujemy relację:

$$x\ R\ y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall_{s \in S}\ M\ (s, x) = M\ (s, y).$$

R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \sum^*$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkim klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją ($\circ$), gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę(odpowiednio monoid), zwaną półgrupa charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

Dla automatu $A = (S, \Sigma, M)$ definiujemy automat charakterystyczny $\overline{A} = (S, \overline{I(A)}, \overline{M})$, gdzie funkcja przejść $\overline{M}$ jest zdefiniowana następująco $\overline{M}(s, \overline{x}) = M(s, x)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A = (S, \Sigma, M)$ nazywamy automat $A_x = (S, \{x\}, M_x)$ gdzie $x \in \Sigma^*$ i M_x jest ograniczeniem M do $S \times \{x\}$.

Dla każdego $x \in \Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie f_x zbioru S w siebie, gdzie : $f_x(s) = M(s, x)$, dla każdego $s \in S$. Przekształcenie f_x jest implikowane przez x. Zbiór przekształceń zbioru S w siebie implikowanych przez wszystkie elementy z Σ będziemy oznaczać symbolem J. J ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy.

Półgrupa F jest antyizomorficzna z $\overline{I}$ ponieważ:

$$\varphi : \overline{I} \to F, \quad \varphi(\overline{x}) = f_x, \text{ gdzie } x \in I, \ \overline{x} \in \overline{I} \text{ przy czym:}$$

(i) $\varphi(\overline{x} \circ \overline{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f_{xy} = f_y(f_x) = \varphi(\overline{y})\,\varphi(\overline{x})$

(ii) $\varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y}) \Rightarrow f_x = f_y \Rightarrow \forall_{s \in S}\ M(s, x) = M(s, y) \Rightarrow x\,R\,y \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$, a zatem φ jest „$1-1$"

(iii) $\varphi(\overline{x}) = f_x \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(\overline{x}) = \varphi^{-1}(f_x) \Rightarrow \overline{x} = \varphi^{-1}(f_x)$, a zatem φ jest na.

Automat można zatem zdefiniować jako parę (S, J), a automat charakterystyczny automatu (S, J) jako parę (S, F).

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary (s_1, s_2) stanów automatu A istnieje element x z półgrupy wejściowej taki, że $M(s_1, x) = s_2$.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, gdy dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi $M(s, \sigma) = M(s, \sigma\sigma)$.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A = (S, \Sigma, M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Niech $A = ({}^A S, \Sigma, {}^A M)$ i $B = ({}^B S, \Sigma, {}^B M)$ będą automatami deterministycznymi. Funkcja $f : A \to B$ jest rozumiana jako funkcja przekształcająca ${}^A S$ w ${}^B S$. Funkcja $f : A \to B$ nazywamy homomorfizmem (zachowuje operacje), jeżeli: $f({}^A M(s, \sigma)) = {}^B M(f(s), \sigma))$, dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$.

Jeżeli $f: A \to B$ jest „1−1" i „na" oraz zachowuje operacje to f nazywamy izomorfizmem.

Homomorfizmem uogólnionym automatu A w B nazywamy parę przekształceń (f_1, f_2) takich, że: $f_1: {}^{A}S \xrightarrow{w} {}^{B}S$, $f_2: {}^{A}\sum^{*} \xrightarrow{w} {}^{B}\sum^{*}$ oraz $f_1({}^{A}M(s,x)) = {}^{B}M(f_1(s), f_2(x))$ dla każdego $s \in {}^{A}S$, $x \in {}^{B}\sum^{*}$.

Niech $q \geq 2$ i $A^0 = (S^{q-1}, \sum, M^{q-1})$ będzie automatem, niech, $A^1 = (S^1, \sum, M^1), \ldots, A^{q-1} = (S^{q-1}, \sum, M^{q-1})$ będą obrazami izomorficznymi związanymi z izomorfizmami stanowymi $g^1 \in Iz(A^0 \to A^1), \ldots, g^{q-1} \in Iz(A^{q-2} \to A^{q-1})$. Rozszerzeniem q automatu A związanym z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, \ldots, g^{q-1}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $ext_q(A) = \left({}^{ext_q(A)}S, \sum, {}^{ext_q(A)}M\right)$ gdzie:

${}^{ext_q(A)}S = (S^0, S^1, \ldots, S^{q-1})$ ${}^{ext_q(A)}M^q = (M^{q,0}, M^{q,1}, \ldots, M^{q,q-1})$

$g^i: S \to S^i$ $i = 0,1,\ldots,q-1$

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ $S^i = \{s_0^i, s_1^i, \ldots, s_{n-1}^i\}$

natomiast $s_j^i = g^i(s_j)$ $j = 0,1,\ldots,n-1$

Ustalonym analogiem rozszerzeni $ext_q A = (S, \sum, M)$ automatu $A = (S, \sum, M)$ związanego z izomorfizmami $g^0, g^1, \ldots, g^{q-1}$ jest trójka uporządkowana $(ext_q(A))^* = \left({}^{ext_q(A)}S^*, \sum, {}^{ext_q(A)}M^*\right)$ gdzie:

${}^{ext_q(A)}S^* = \bigcup_{i=0}^{q-1} S^i$, a ${}^{ext_q(A)}M^*: {}^{ext_q(A)}S^* \times \sum \to {}^{ext_q(A)}S^*$

jest funkcją przejść zdefiniowaną dla dowolnych $s \in S^i$, jak następuje ${}^{ext_q(A)}M^*(s,\sigma) = M^{q,i}(s,\sigma)$. Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\sum = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ wprowadzamy $x_0 = \sigma_0\sigma_1$ i $x_1 = \sigma_1\sigma_0$, dla których $f_{x_0} = f_{\sigma_1}(f_{\sigma_0})$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}(f_{\sigma_1})$. Dla dowolnego $x \in \sum^*$ zdefiniujemy przekształcenie $f_x: S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje: $\forall_{s \in S} f_x(s) = M(s,x)$ gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy $\forall_{s \in S} f_x(s) = f_{x'\sigma}(s) = f_\sigma(f_{x'}(s,\sigma))$.

Iloczyn prosty automatów $A = ({}^{A}S, \sum, {}^{A}M)$ i $B = ({}^{B}S, \sum, {}^{B}M)$ jest trójką uporządkowaną $A \times B = \left({}^{(A\times B)}S, \sum, {}^{(A\times B)}M\right)$, gdzie ${}^{(A\times B)}S = {}^{A}S \times {}^{B}S$; ${}^{(A\times B)}M: {}^{(A\times B)}S \times \sum \to {}^{(A\times B)}S$, a funkcja przejść jest zdefiniowana jak następuje ${}^{A\times B}M\left(({}^{A}s, {}^{B}s), (\sigma)\right) = \left({}^{A}M({}^{A}s, \sigma), {}^{B}M({}^{B}s, \sigma)\right)$.

Dla dowolnego $x \in \Sigma^*$ definiujemy przekształcenie ${}^{A}f_x : {}^{A}S \xrightarrow{w} {}^{A}S$ określoną jak następuje:

$\forall {}^{A}s \in {}^{A}S \quad {}^{A}f_x\left({}^{A}s\right) = {}^{A}M\left({}^{A}s, x\right)$, gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy

$\forall {}^{A}s \in {}^{A}S \quad {}^{A}f_x\left({}^{A}s\right) = {}^{A}f_{x'\sigma}\left({}^{A}s\right) = {}^{A}f_{\sigma}\left({}^{A}f_{x'}\left({}^{A}s\right)\right)$

Przy wyznaczaniu złożoności półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatu z klasy EXT DFASC$_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions) wykorzystano nowy algorytm na wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych przedstawiony w [1,3,5,6,8]. W pracach [5,6,8] przeprowadzono formalny dowód. W pracy [8] pokazano także odpowiednią interpretacje graficzną przedstawiono także programy języku BASIC , PASCAL i C^{++} wraz wizualizacją i praktyczną realizacją

2. ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ ILOCZYNU PROSTEGO AUTOMATÓW Z KLASY EXT DFASC$_2$

Twierdzenie 1.

Niech $ext_q(A \times B) = \left({}^{ext_q(A\times B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\times B)}M\right)$ będzie rozszerzeniem stanowym związanym z izomorfizmami $g_0, g_1,..., g_{q-1}$ iloczynu prostego $A \times B = \left({}^{A\times B}S, \Sigma, {}^{A\times B}M\right)$ automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{A}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ z klasy DFASC$_2$ taki, że: card (^{A}S) = m > 2; card (^{B}S) = n >2; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left(ext_q(A\times B)\right)}^*$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$card\left(\overline{I(ext)_q(A\times B)}\right)^* = 2q[m,n,q] \tag{1}$$

Dowód.

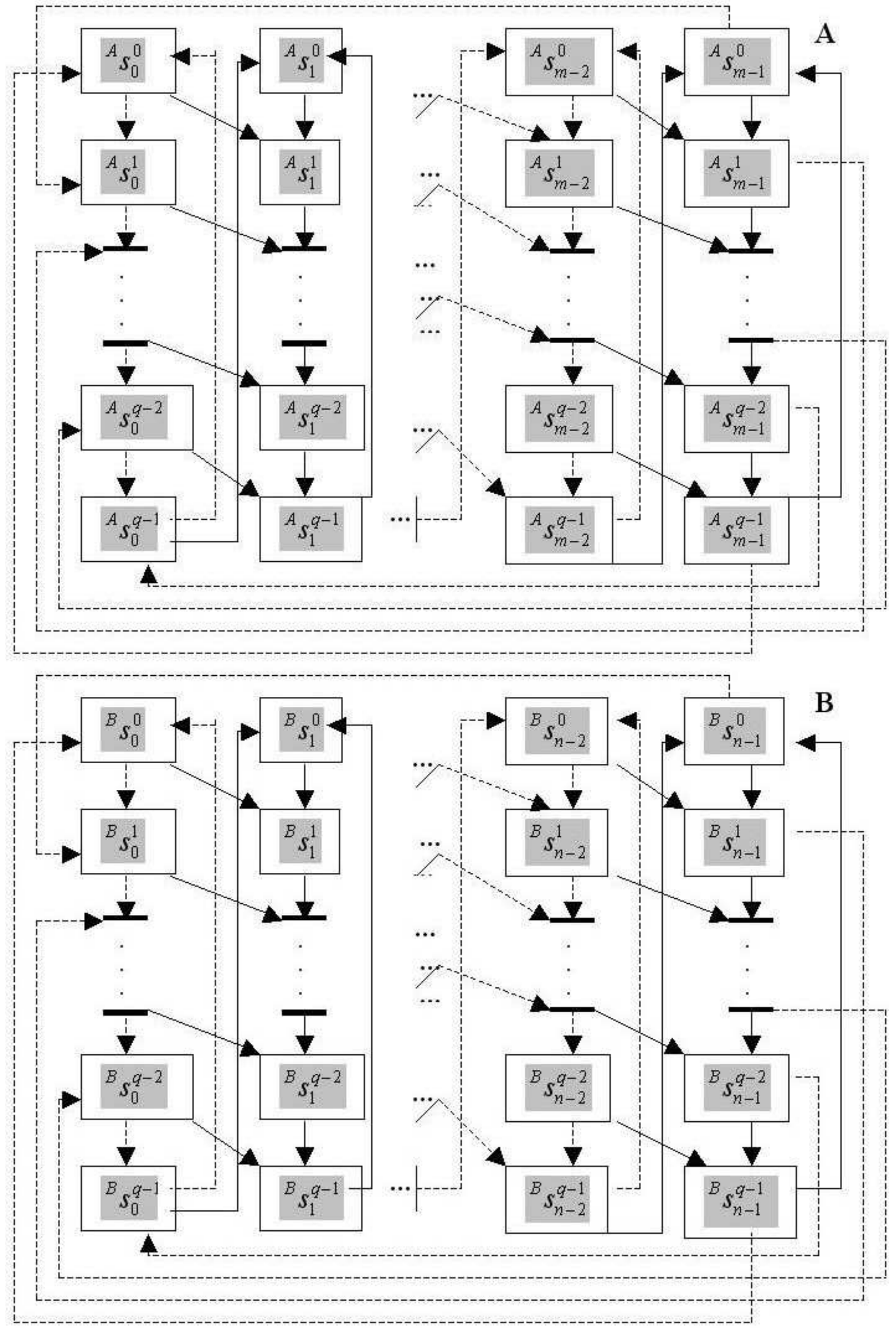
Uwzględniając rys.1 otrzymujmy następujące uporządkowane pary stanów:

$$^{ext_q(A\times B)}S =$$
$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_0^0, {}^{B}s_0^0\right), \left({}^{A}s_0^0, {}^{B}s_1^0\right), ..., \left({}^{A}s_0^0, {}^{B}s_{n-2}^0\right), \left({}^{A}s_0^0, {}^{B}s_{n-1}^0\right), \left({}^{A}s_1^0, {}^{B}s_0^0\right), \left({}^{A}s_1^0, {}^{B}s_1^0\right), ..., \\ \left({}^{A}s_1^0, {}^{B}s_{n-2}^0\right), \left({}^{A}s_1^0, {}^{B}s_{n-1}^0\right), ..., \left({}^{A}s_{m-2}^0, {}^{B}s_0^0\right), \left({}^{A}s_{m-2}^0, {}^{B}s_1^0\right), ..., \left({}^{A}s_{m-2}^0, {}^{B}s_{n-2}^0\right), \\ \left({}^{A}s_{m-2}^0, {}^{B}s_{n-1}^0\right), \left({}^{A}s_{m-1}^0, {}^{B}s_0^0\right), \left({}^{A}s_{m-1}^0, {}^{B}s_1^0\right), ..., \left({}^{A}s_{m-1}^0, {}^{B}s_{n-2}^0\right), \left({}^{A}s_{m-1}^0, {}^{B}s_{n-1}^0\right) \end{pmatrix}$$

.

.

.



Rys. 1. Ustalone analogi $((ext_q(A))^*$ i $((ext_q(B))^*$ automatóA i B

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\\ ,\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\end{array}\right)$$

Po przekształceniu pod wpływem σ_0 uporządkowanych par stanów rozszerzenia stanowego iloczynu prostego A i B otrzymujemy

$$^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}=$$

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\end{array}\right)$$

Po q – krotnej konkatenacji σ_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q}=$$

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\end{array}\right)$$

.

.

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\\ ,\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\end{array}\right)$$

Po (q+1) – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$$

Z kolei pod wpływem słowa $x_0 = \sigma_0\sigma_1$ otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{x_0} =$$

$$\begin{pmatrix} ({}^A s_2^2, {}^B s_2^2), ({}^A s_2^2, {}^B s_2^2), \ldots, ({}^A s_2^2, {}^B s_0^2), ({}^A s_2^2, {}^B s_0^2), ({}^A s_2^2, {}^B s_2^2), ({}^A s_2^2, {}^B s_2^2), \ldots, \\ ({}^A s_2^2, {}^B s_0^2), ({}^A s_2^2, {}^B s_0^2), \ldots, ({}^A s_0^2, {}^B s_2^2), ({}^A s_0^2, {}^B s_2^2), \ldots, ({}^A s_0^2, {}^B s_0^2), \\ ({}^A s_0^2, {}^B s_0^2), ({}^A s_0^2, {}^B s_2^2), ({}^A s_0^2, {}^B s_2^2), \ldots, ({}^A s_0^2, {}^B s_0^2), ({}^A s_0^2, {}^B s_0^2) \end{pmatrix}$$

.
.
.

$$\begin{pmatrix} ({}^A s_2^1, {}^B s_2^1), ({}^A s_2^1, {}^B s_2^1), \ldots, ({}^A s_2^1, {}^B s_0^1), ({}^A s_2^1, {}^B s_0^1), ({}^A s_2^1, {}^B s_2^1), ({}^A s_2^1, {}^B s_2^1), \ldots, \\ ({}^A s_2^1, {}^B s_0^1), ({}^A s_2^1, {}^B s_0^1), \ldots, ({}^A s_0^1, {}^B s_2^1), ({}^A s_0^1, {}^B s_2^1), \ldots, ({}^A s_0^1, {}^B s_0^1), \\ ({}^A s_0^1, {}^B s_0^1), ({}^A s_0^1, {}^B s_2^1), ({}^A s_0^1, {}^B s_2^1), \ldots, ({}^A s_0^1, {}^B s_0^1), ({}^A s_0^1, {}^B s_0^1) \end{pmatrix}$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania[m,n]:
$d_0 = m – k_0 n$; $b_0 = n – d_0$;
k_0 – całkowita wielokrotność liczby n, m; $m > n$
$d_1 = m – b_0 – k_0 n$; $b_1 = n – d_1$
.
.
.
$d_{w-2} = m – b_{w-3} – k_0 n$; $b_{w-2} = n – d_{w-2}$
$d_{w-1} = m – b_{w-2} – k_0 n = 0$
Wtedy [m, n] = mw = p
W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < w–1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.
Gdy $n > m$ to $d_0 = n – k_0 m$, $b_0 = m – d_0$ i dalej postępujemy analogicznie.
Dowód przeprowadzamy zakładając, że $m > n$.

Po $\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{n}{2}}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

.
.
.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy: $d_0 = m - k_0$; $b_0 = n - d_0$

Po $k_0\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_o otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_0\frac{n}{2}}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \ldots, \\
\left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \\
\left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right)\left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right), \ldots, \\
\left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{kk_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right), \\
\left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right)\left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}S^{k_o n-1}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

Po k_0 n – konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_0 n}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \ldots, \\
\left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \\
\left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right)\left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \ldots, \\
\left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \\
\left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right)\left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}S^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}S^{2k_o n-1}_{n-2}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:

$d_1 = m - b_0 - k_0$; $b_1 = n - d_1$

Po $\dfrac{wm}{2} = \dfrac{[w,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy, że:

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$ i wtedy mamy następujące przekształcenie:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}=
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_0^{wm})({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_0^{wm}),\dots,({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_0^{wm})({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_0^{wm})\\
,\dots,({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})({}^{A}s_0^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm}),\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_0^{wm})({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_0^{wm}),\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})\\
({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_0^{wm})({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_0^{wm}),\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})({}^{A}s_{m-2}^{wm},{}^{B}s_{n-2}^{wm})
\end{array}\right)
$$

.
.
.

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1})({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1}),\dots,({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1})\\
({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1}),\dots,({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_0^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1}),\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1})\\
({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1}),\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1})({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_0^{wm-1})\\
,\dots,({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})({}^{A}s_{m-2}^{wm-1},{}^{B}s_{n-2}^{wm-1})
\end{array}\right)
$$

Po σ_0 i $\frac{wm}{2}=\frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}=
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1})({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1}),\dots,({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})\\
({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1})({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1}),\dots,({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})({}^{A}s_1^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}),\dots,\\
({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1})({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1}),\dots,({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})\\
({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1})({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_1^{wm+1}),\dots,({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1})
\end{array}\right)
$$

.
.
.

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_1^{wm})({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_1^{wm}),\dots,({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_1^{wm})\\
({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_1^{wm}),\dots,({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_1^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}),\dots,({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_1^{wm})\\
({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_1^{wm}),\dots,({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_1^{wm})({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_1^{wm})\\
,\dots,({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm})
\end{array}\right)
$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{wm}{2}=\frac{[wm]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1} x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}={}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}
$$

Dla przekształcenia ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenie ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}$.

W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenie ${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}}$.

Rozważania dla przekształceń ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}, \ldots, {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{wm}{2}}}$ są analogiczne. Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb oraz uwzględniając definicję rozszerzenia stanowego automatu z klasy EXT DFASC$_2$ wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi $q[m,n]$.

Niech [m, n] = mw = p. Z przytoczonych rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb oraz uwzględniając definicje rozszerzenia automatu asynchronicznego silnie spójnego wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi p przekształceń. Wtedy po $\frac{p}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{p}{2}}} =
$$

$$
\left(
\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right) \\
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right),\ldots, \\
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)
\end{array}
\right)
$$

.
.
.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-11}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{0}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności, dla trzech liczb [m, n, q] = [[m, n],q] = [p, q], gdzie p = [m, n]:

k_1 - całkowita wielokrotność liczby p w q; $q > p$

$d_{0,0} = q - k_1 p$, $b_{0,0} = p - d_{0,0}$,

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$, $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

.
.
.

$\mathbf{d_{t-2,t-2}} = q - b_{t-3,t-3} - k_1 p$ $b_{t-2,t-2} = p - d_{t-2,t-2}$

$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - k_1 p = 0$

[m, n, q] = [p, q] =[[m, n], q] = q t

W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < t-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.

Gdy $p > q$ to $d_{0,0} = p - k_1 q$, $b_0 = q - d_{0,0}$ i dalej postępujemy analogicznie.

Dowód przeprowadzamy zakładając, że $q > p$.

Po $k_1 \frac{p}{2}$ dla – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_1\frac{p}{2}}} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right) \\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right) \\
,\ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)
\end{pmatrix}
$$

.

.

.

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right) \\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots, \\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)
\end{pmatrix}
$$

Po k_1 p = krotnej konkatenacji słowa otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_1\frac{p}{2}}} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right) \\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right) \\
,\ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)
\end{pmatrix}
$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{qq-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n, q]:

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$; $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

Po $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{qq-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)
\end{array}\right)$$

.
.
.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{qq-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n, q]:

$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - k_1 p = 0.$

Dla $d_{t-1,t-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie ${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}}$ w następującej postaci:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_0^0)({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_0^0),\ldots,({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_{n-2}^0)({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_{n-2}^0)({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_0^0)({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_0^0),\ldots,\\
({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_{n-2}^0)({}^{A}s_0^0,{}^{B}s_{n-2}^0),\ldots,({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_0^0)({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_0^0),\ldots,({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_{n-2}^0)\\
({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_{n-2}^0)({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_0^0)({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_0^0),\ldots,({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_{n-2}^0)({}^{A}s_{m-2}^0,{}^{B}s_{n-2}^0)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1})({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1}),\ldots,({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1})\\
({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1}),\ldots,({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})({}^{A}s_0^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}),\ldots,({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1})({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1})\\
,\ldots,({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1})({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_0^{q-1}),\ldots,({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})\\
({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1})
\end{array}\right)
$$

Po σ_0 i $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_1^1)({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_1^1),\ldots,({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_{n-1}^1)({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_{n-1}^1)({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_1^1)({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_1^1),\ldots,\\
({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_{n-1}^1)({}^{A}s_1^1,{}^{B}s_{n-1}^1),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_1^1)({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_1^1),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_{n-1}^1)({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_{n-1}^1)\\
({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_0^1)({}^{A}s_{m-11}^1,{}^{B}s_1^1),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_{n-1}^1)({}^{A}s_{m-1}^1,{}^{B}s_{n-1}^1)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_1^0)({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_1^0),\ldots,({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_{n-1}^0)({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_{n-1}^0)({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_1^0)({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_1^0),\ldots,\\
({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_{n-1}^0)({}^{A}s_1^0,{}^{B}s_{n-1}^0),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_1^0)({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_1^0),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_{n-1}^0)({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_{n-1}^0)\\
({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_0^0)({}^{A}s_{m-11}^0,{}^{B}s_1^0),\ldots,({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_{n-1}^0)({}^{A}s_{m-1}^0,{}^{B}s_{n-1}^0)
\end{array}\right)
$$

Po $\sigma_0^q \frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)
\end{array}\right)$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$$

Z przedstawionych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi [m, n, q]. Dla pozostałych przekształceń otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0\sigma_0}$$

.

.

.

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q}x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}}$$

Stąd liczba wykonanych przekształceń jest równa q[m, n, q].
Identyczną liczbę przekształceń uzyskamy rozpoczynając przekształcenie zbioru uporządkowanych par stanów rozszerzenia stanowego iloczynu prostego automatów A i B pod wpływem litery σ_1 zatem otrzymujemy wzór 1.

C.B.D.O.

4. WNIOSKI

Dalsze prace powinny być kontynuowane przy wyznaczaniu złożoności półgrup charakterystycznych automatów asynchronicznych spójnych. Szczegółowe rozpatrywanie klas automatów asynchronicznych silnie spójnych i spójnych wynika z powszechnego stosowania tych klas automatów w realizacjach technicznych cyfrowych układów sterujących. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować lub obliczyć złożoność półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na oszacowanie złożoności programów i czasu wizualizacje stanów automatów. Wykorzystując narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy przedstawić model sterowania pojazdu szynowego w postaci grafu automatu (maszyny stanowej) i realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę graficzną zjawisk podczas symulacji sterowania pojazdem szynowym.. Mikrosystemy cyfrowe stosowane są obecnie do sterowania hamulców (tablic pneumatycznych) w lokomotywach i jednostkach elektrycznych.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Bocian S.: *Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych i ich rozszerzeń,* Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk nr 552, Warszawa, 1984.
[2] Bocian S., Mikołajczak.: *Computational aspect of assigning characteristic semigroup asychronous automata and their extensions*, Colloqia Mathematica Societatis Janos Bolyai nr 44,Amsterdam, New York, Budapest, 1985.
[3] Bocian S.: *Rozprawa doktorska*, Politechnika Poznańska,1986.
[4] Bocian S.: *The complexity of semigroup characterization of asynchronous strongly connected automaton and their extensions*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.
[5] Bocian S.: *A new method of calculating the smallest common multiple*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.
[6] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, jako model matematyczny automatu w technice komputerowej,* Pojazdy szynowe 1/2002.
[7] Bocian S.: *Złożoność pólgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIII INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT,* Zakopane 2009.
[8] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych*, OR – 9834 (praca nie publikowana).

Praca wykonana w ramach Projektu Badawczego KBN nr N N509 398236 „Mikrosystemy cyfrowe do inteligentnego, rozproszonego i współbieżnego sterowania pojazdami szynowymi.”