

KRÓLICKA Agnieszka¹
TRĘBACKI Kazimierz²

ZASTOSOWANIE WIDMA PIERSONA-MOSKOWITZA DO ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWEGO WIELOKADŁUBOWEJ JEDNOSTKI PŁYWAJĄCEJ

Ruch układu dynamicznego może być wywołany przez różne czynniki pochodzenia zewnętrznego lub wewnętrznego. Przy modelowaniu matematycznym wybieramy zewnętrzne czynniki wymuszające, których wpływ na układ jest najbardziej znaczący. Takie czynniki zewnętrzne są zazwyczaj nazywane wymuszeniami. Reakcja układu na zadane wymuszenia jest scharakteryzowana matematycznie przez określoną transformację zwaną operatorem układu. Dla szerokiej klasy rzeczywistych układów dynamicznych związek między wymuszeniami a reakcją jest scharakteryzowany przez równania różniczkowe ruchu. Dynamiczne układy mechaniczne reprezentujące obiekty pływające są ściśle związane z procesami stochastycznymi. Zmienne stanu i parametry wejścia w tych modelach mają charakter probabilistyczny. Modele matematyczne takich układów są reprezentowane przez układy stochastycznych równań różniczkowych tworząc układy równań $Itô$.

APPLICATION OF PIERSON-MOSKOWITZ WAVE SPECTRUM TO SOLUTION DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MULTIHULL VESSEL

Motion of a dynamic system can be generated by different external or internal factors. At mathematical modelling external excitation factors of the most significant effect on the system, are selected. Such external factors are usually called excitations. Response of the system to given excitations is mathematically characterized by a definite transformation called operator of a system. For a broad class of dynamic systems the relation between excitations and response is characterized by differential equations of motion. Dynamic mechanical systems which represent floating objects are tightly associated with stochastic processes. State variables and input parameters of the models are of probabilistic character. Mathematical models of such systems are represented by sets of stochastic differential equations, and form sets of $Itô$ equations.

¹ mgr inż. Centrum Techniki Okrętowej S.A., Ośrodek Hydromechaniki Okrętu, Ul. Szczecińska 65, 80-369 Gdańsk, Tel.: +48 58 511 63 02, +48 58 556 11 25, E-mail: agnieszka.krolicka@cto.gda.pl.

² dr inż. Politechnika Gdańska, Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, Katedra mechaniki, Konstrukcji i Wytrzymałości Okrętu, Ul. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk, Tel.: +4858 347 22 91, E-mail: katre@pg.gda.pl.

1. WSTĘP

Związki między wymuszeniem (wejściem) układu mechanicznego a odpowiedzią (wyjściem) oraz parametrami strukturalnymi są przedstawione najczęściej w postaci równań różniczkowych. Są to przeważnie równania Lagrange'a postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}^j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q^j} = Q_j + \lambda_\mu^{(1)} C_j^{(1)\mu} + \lambda_\nu C_j^{(2)\nu} \quad (1)$$

gdzie:

E -energia układu, q^j -współrzędna uogólniona, Q_j -siła uogólniona,

$\lambda_\mu^{(1)}$, $\lambda_\nu^{(2)}$ -mnożniki Lagrange'a odpowiednio więzów holonomicznych i anholonomicznych

Uzupełnieniem równania (1) są równania wynikające z różniczkowania równań więzów

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_k^{(1)\mu} \dot{q}^k + C_k^{(1)\mu} \ddot{q}^k + D^{(1)\mu} &= 0 \\ \dot{C}_k^{(2)\nu} \dot{q}^k + C_k^{(2)\nu} \ddot{q}^k + D^{(2)\nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdzie:

$C^{(1)\mu}$, $C^{(2)\nu}$, $D^{(1)\mu}$ oraz $D^{(2)\nu}$ są funkcjami współrzędnych uogólnionych i czasu.

Dla układów holonomicznych równania (1) przyjmują prostszą postać. Po prawej stronie występują tylko siły uogólnione Q_j . Wykazuje się, że zagadnienie dynamiki układu mechanicznego opisanego modelem (1) może być rozważane jako zagadnienie ruchu punktu w przestrzeni konfiguracyjnej (przestrzeni Riemanna). Równania (1) sprowadzają się do układu równań drugiego rzędu.

Istnieje inny zapis równań opisujących dynamikę układów mechanicznych. Jeżeli rozważania będą prowadzone w przestrzeni fazowej to wystąpi wówczas dwukrotnie więcej współrzędnych bo oprócz uogólnionych pojawia się taka sama liczba uogólnionych pędów. W tym przypadku mamy do czynienia z dwa razy większą liczbą równań pierwszego rzędu. Jeżeli związki między wzbudzeniem i odpowiedzią układu dynamicznego są związkami „bezinercyjnymi” to metody analizy są oparte na elementarnej teorii prawdopodobieństwa. W tym przypadku podstawowym zagadnieniem jest wyznaczenie gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. W bezinercyjnych przekształceniach procesów wprowadzenie dodatkowych związków probabilistycznych typu czasowego nie powoduje zmian tego procesu. Przykładowo na wzbudzenie typu markowskiego odpowiedź układu jest również typu markowskiego. Ważną klasę procesów stanowią procesy drugiego rzędu tj. procesy o skończonej wariancji. W tym przypadku ważną rolę odgrywa funkcja korelacyjna procesu. W przypadku układu procesów korelacyjnych można utworzyć macierz korelacyjną. Dla procesu stacjonarnego (funkcja korelacyjna zależy tylko od różnicy czasowej) wartość średnia i średnie odchylenie kwadratowe nie zależą od czasu. W procesach ergodycznych średnie liczone po przestrzeni zdarzeń elementarnych i średnie liczone względem czasu są sobie równe. Bardzo często procesy stacjonarne drugiego rzędu charakteryzuje się gęstością spektralną tzw. widmem energetycznym. Związek między funkcją korelacyjną a gęstością spektralną wyznaczają równości Chinczyna-Wienera. Jeżeli obszar częstości w którym gęstość spektralna jest różna od zera, jest dużo mniejszy od pewnej średniej wartości to

proces nazywamy wąskopasmowym. W przypadku przeciwnym proces nazywamy szerokopasmowym. Proces o stałej gęstości spektralnej nosi nazwę „białego szumu”. Procesy cechujące się niezmienniczością prawdopodobieństwa przejścia względem wyboru chwili początkowej nazywamy procesami Markowa.

2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE DLA PROCESU STOCHASTYCZNEGO $Y(t)$

Równanie postaci:

$$\frac{dY(t)}{dt} = F[Y(t), X(t, \gamma), t], \quad Y(t_0) = Y_0 \quad (3)$$

gdzie:

F - funkcja nielosowa, $X(t, \gamma)$ - proces stochastyczny, nazywamy *stochastycznym równaniem różniczkowym*.

Warunek początkowy Y_0 może być deterministyczny lub losowy. Jeżeli równanie (3) dotyczy mocno nieregularnych procesów stochastycznych, takich jak „biały szum”, to mamy do czynienia ze *stochastycznym równaniem różniczkowym Itô*, które przyjmuje postać:

$$dY(t) = m[Y(t), t]dt + \sigma[Y(t), t]dW(t) \quad (4)$$

gdzie:

$Y(t)$ - nieznan proces stochastyczny, $W(t)$ - proces Wienera,

$m(y, t)$ i $\sigma(y, t)$ - są pewnymi funkcjami określonymi dla $t \in [t_0, T]$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Ze względu, że realizacje procesu Wienera są nieróżniczkowalne, więc aby móc całkować równanie (4) wymagane jest określenie *całki stochastycznej Itô*. Stochastyczne równania *Itô* są wykorzystywane do modelowania układów dynamicznych z szybko zmieniającymi się losowymi wymuszeniami, np. wymuszeniami opisywanymi przez biały szum. Cechą charakterystyczną stochastycznych równań *Itô* jest to, że przy dość ogólnych założeniach rozwiązaniami są procesy dyfuzyjne Markowa.

Układ dynamiczny możemy opisać przez linowe stochastyczne równanie różniczkowe w postaci:

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + BX(t) + \varepsilon(t) \quad t \in [0, T] \quad (5)$$

gdzie:

$\varepsilon(t)$ - jest d-wymiarowym procesem szumowym z $E\varepsilon(t) = 0$, A i B są niewiadomym

(dxd) i (dxp) parametrowymi macierzami a $X(\cdot) : [0, T] \rightarrow R^p$ jest znaną p-wymiarową funkcją.

Gdy przyjmujemy, że $\varepsilon(t)$ jest Gaussowskim biało-szumowym procesem, wówczas

równanie (5) staje się stochastycznym równaniem różniczkowym typu *Itô* :

$$dY(t) = [AY(t) + BX(t)]dt + dW(t), \quad t \in [0, T] \quad (6)$$

gdzie:

$W(t)$ - jest d-wymiarowym procesem Wienera.

3. JEDNOSTKI WIELOKADŁUBOWE

Jednostki wielokadłubowe typu katamarany i trimarany należą do złożonych układów dynamicznych mocno nieliniowych. Jeżeli model układu dynamicznego jest liniowym modelem jednostek pływających to równania:

$$\sum_{i,j=1}^6 I_{ij} \ddot{\eta}_i + B_{ij} \dot{\eta}_i + C_{ij} \eta_i = F_i(t) \quad (7)$$

gdzie:

$I_{ij} = M_{ij} + A_{ij}$ - macierz bezwładności,

M_{ij} - elementy macierzy uogólnionych mas konstrukcji,

A_{ij} - elementy macierzy uogólnionych mas hydrodynamicznych-mas towarzyszących,

B_{ij} - macierz tłumienia hydrodynamicznego, C_{ij} - macierz sztywności hydrostatycznej,

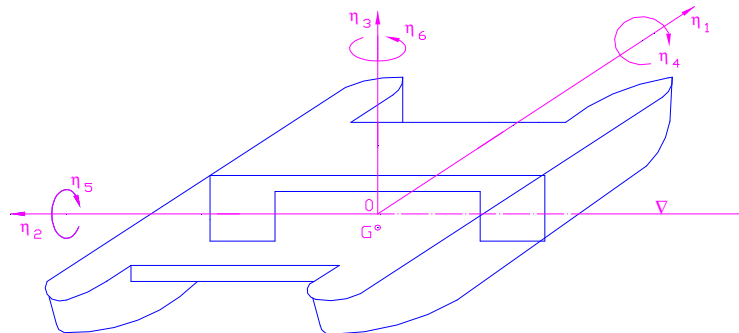
η_i - wektor przemieszczeń uogólnionych, $F_i(t)$ - wektor sił i momentów wymuszających, mogą być analizowane jako układ dwóch grup niesprzężonych ze sobą zawierających równania wzajemnie sprzężone. Zakładamy że istnieje sprzężenie przez liniowe i nieliniowe współczynniki tłumienia i współczynniki sprężystości hydrostatycznej.

Zakładamy iż badany obiekt traktujemy jako liniowy układ dynamiczny o 6-ciu stopniach swobody. Należą do nich :

a) oscylacja wzdłużna (surge)- η_1 , b) oscylacja poprzeczna (sway)- η_2 , c) nurzanie

(heave)- η_3 , d) kołysanie (roll)- η_4 , e) kiwanie (pitch)- η_5 , f) myszkowanie (yaw)- η_6 .

Układ współrzędnych związany z katamaranem pokazano na rys.1.



Rys.1. Schemat modelu fizycznego katamarana

Lokalne ruchy jednostki są jego odpowiedzią na wymuszenia pochodzące od falowania morza.

Do pierwszej grupy należą równania opisujące ruchy symetryczne (ruchy wzdłużne) do których należą: η_1, η_3, η_5 . Drugą grupę stanowią równania opisujące ruchy antysymetryczne (ruchy poprzeczne) do których zaliczmy: η_2, η_4, η_6 . Względy konstrukcyjne (symetria) wielokadłubowych jednostek pływających pozwalają na analizę grupowo sprzężonych ruchów obiektu, a co za tym idzie ograniczenie ilości zmiennych stanu występujących w równaniach.

4. RÓWNANIA STANU JEDNOSTKI WIELOKADŁUBOWEJ

Równania stanu są jenem ze sposobów na reprezentowanie modelu matematycznego układu dynamicznego. Alternatywnym do równań stanu sposobem opisu układu dynamicznego jest transmitancja $G(s)$, która zakłada zerowy stan początkowy. Transmitancja opisuje ogólne własności stacjonarnego układu liniowego o jenem wejściu i jenem wyjściu, niezależnie od rodzaju wymuszenia. Dla układów opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach transmitancja jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej s (można ją przedstawić za pomocą ilorazu dwóch wielomianów (10)).

Przy wyznaczaniu układu równań stanu przyjmujemy następujący schemat postępowania:

- 1) ruch wynikowy obiektu na fali nieregularnej stanowi superpozycję ruchów na fali regularnej,
- 2) uwzględnia się tylko napływ fali czołowej od której występują tylko ruchy: η_1 -surge, η_3 -heave i η_5 -pitch.

Wykorzystując równanie (7) ruch obiektu wymuszany falą jest przedstawiony następującym równaniem stanu:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= Q \\ \dot{Q} &= -I^{-1}B\dot{\eta} - I^{-1}C\eta + I^{-1}F_i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

gdzie:

I, B, C - macierze 3×3

$$P = \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_3 \\ \eta_5 \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_5 \end{Bmatrix}, \quad F_w = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

- 3) zakłada się że odpowiedź w postaci uogólnionych sił F_i ($i = 1,3,5$) od fali, na wymuszenie od fali o wysokości $\xi(t)$ może być aproksymowana układem, którego transmitancja ma postać:

$$\frac{F(s)}{\xi(s)} = \frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{s^2 + a_1s + a_2} \quad (10)$$

gdzie:

$$F(F_1, F_3, F_5), \quad b_0(b_{01}, b_{03}, b_{05}), \quad b_1(b_{11}, b_{13}, b_{15}), \quad b_2(b_{21}, b_{23}, b_{25}), \\ a_1(a_{11}, a_{13}, a_{15}), \quad a_2(a_{21}, a_{23}, a_{25}).$$

Związek (10) może być zapisany następującym układem równań stanu:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= F - h_0 \xi & \dot{f}_1 &= f_2 + h_1 \xi \\ \dot{f}_2 &= \dot{F} - h_0 \dot{\xi} - h_1 \xi & \dot{f}_2 &= -a_2 f_1 - a_1 f_2 + h_2 \xi \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie:

h_0, h_1, h_2 - stałe określone współczynnikami równania (10),

$f_1(f_{11}, f_{13}, f_{15}), \quad f_2(f_{21}, f_{23}, f_{25}),$

$h_0(h_{01}, h_{03}, h_{05}), \quad h_1(h_{11}, h_{13}, h_{15}), \quad (h_{21}, h_{23}, h_{25}).$

Aby otrzymać proces losowy wysokości fali $\xi(t)$ (fala nieregularna) należy wykorzystać znane spektra energetyczne (widma falowania) fali napływowej na obiekt

$$\phi_{\xi\xi}(\omega) = \text{widmo Piersona Moskowitza} \quad (12)$$

Wybrane powyższe widmo aproksymujemy funkcją gęstości spektralnej postaci:

$$g(\omega) = \frac{C\omega^2}{\omega^4 - 2v\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4} \quad (13)$$

Wprowadzamy filtr kształtu wykorzystując założenia:

1. W obydwóch spektrach tj.(12) i (13) maximum występuje przy tej samej częstotliwości i ma tą samą wartość
2. $\int_0^{\infty} \phi_{\xi\xi}(\omega)d\omega = \int_0^{\infty} g(\omega)d\omega$
3. Procesy wysokości fali są generowane przez transmitancję $G(s)$, jeżeli na wejściu jest tzw. "biały szum" to jest to wówczas tzw. filtr kształtu. $G(s)$ jest dana zależnością:

$$G(s) = \frac{a_0 s}{s^2 + a_1 s + a_2} \quad (14)$$

Zależność (11) odpowiada następującemu układowi równań stanu

$$\begin{aligned} g_1 &= \xi & \dot{g}_1 &= g_2 + a_0 W \\ g_2 &= \dot{\xi} - a_0 W & \dot{g}_2 &= -a_2 g_1 - a_1 g_2 - a_0 a_1 W \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie:

W - „biały szum”, $\xi(t)$ -proces falowania.

Równania stanu dla ruchów symetrycznych jednostki

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= z_2 \\ x_2 &= \dot{z}_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{z}_2 = \dot{\eta}_3 = -I^{-1}B\dot{\eta}_3 - I^{-1}C\eta_3 + I^{-1}F_3 \\ x_3 &= z_3 \\ x_4 &= \dot{z}_3 \\ \dot{x}_4 &= \dot{z}_3 = \dot{\eta}_5 = -I^{-1}B\dot{\eta}_5 - I^{-1}C\eta_5 + I^{-1}F_5 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Macierz równań stanu możemy zapisać w następującej postaci:

$$\ddot{Q} = \begin{bmatrix} -C \\ A \end{bmatrix} Q + \begin{bmatrix} -B \\ A \end{bmatrix} \dot{Q} + \begin{bmatrix} D \\ A \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} G + \tilde{a}W \quad (17)$$

gdzie:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_5 \end{bmatrix} \quad \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad \tilde{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ -a_0 a_1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{13} \\ f_{23} \\ f_{15} \\ f_{25} \end{bmatrix}$$

Powyższe możemy zapisać w postaci równania *Itô*

$$\dot{X} = \tilde{A} \cdot X + \tilde{B} \cdot W \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{Q} \\ \ddot{Q} \\ \dot{F} \\ \dot{G} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{0}_{3 \times 3} & I & \tilde{0}_{3 \times 6} & \tilde{0}_{3 \times 2} \\ \begin{bmatrix} -C \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -B \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} \\ \tilde{0}_{6 \times 6} & [P_6] & \tilde{0}_{6 \times 2} & \\ \tilde{0}_{2 \times 6} & \tilde{0}_{2 \times 6} & [P_2] & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ \dot{Q} \\ F \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{0}_{12 \times 1} \\ \tilde{a} \end{bmatrix} \cdot W$$

gdzie: $\tilde{0}_{m \times n}$ - macierz z wartościami zerowymi: m - ilość wierszy, n -ilość kolumn

$$\dot{F} = [P_6]F \quad \dot{G} = [P_2]G + \tilde{a}W$$

$$[P_6] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & & \tilde{0}_{2 \times 2} & & & \\ -a_{21} - a_{11} & & & & & \\ & \tilde{0}_{2 \times 2} & & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -a_{23} - a_{13} & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & \tilde{0}_{2 \times 2} & & & & & & \\ & & \tilde{0}_{2 \times 2} & & & & & \\ & & & & & & & -a_{25} - a_{15} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [P_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

5. WIDMO PIERSONA-MOSKOWITZA

Dla widma Piersona-Moskowitza przyjmuje się następujące wielkości (w postaci bezwymiarowej):

$$F(\omega) = \frac{S(\omega)}{T_2 \cdot h_{1/3}^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{\omega T_2}{2\pi} \right]^{-5} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega T_2}{2\pi} \right)^4 \right] \quad (19)$$

Dla $\varepsilon \cong 0,59$ otrzymuje się następujące relacje między charakterystycznymi okresami

$$T_2 = 0,92T_1; \quad \omega_m T_1 = 4,849; \quad \frac{\omega_m}{\omega_{sr}} = \frac{\omega_m}{\omega} = \frac{T_1}{T_0} = 0,771; \quad T_0 = T_m = 1,408T_2$$

Do rozwiązania przyjmujemy:

$$\phi = \frac{A}{\omega^5} e \left(-\frac{B}{\omega^4} \right) \quad (20)$$

$$T_1 = 0,771T_0 \quad T_2 = 0,92T_1$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi}{T_2} \right)^5 = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi}{0,92T_1} \right)^5 = \frac{1}{8\pi^2 (0,92)^5} \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^5 = 188,17 \\ B &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{T_1} \right)^4 = 496,1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Widmo aproksymujemy funkcją gęstości spektralnej następującej postaci:

$$g(\omega) = \frac{C\omega^2}{\omega^4 - 2v\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4} \quad (22)$$

Niech

$$\left. \begin{aligned} 2v\omega_0^2 &\equiv D \\ \omega_0^4 &\equiv E \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Wyznaczamy ω przy której wystąpi ekstremum czyli:

$$g(\omega) = \frac{C\omega^2}{\omega^4 - D\omega^2 + E} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}[\phi(\omega)] = \frac{\partial}{\partial \omega}[g(\omega)] \quad (25)$$

Z warunku, że w tym samym miejscu istnieje ekstremum otrzymujemy:

Pierwsze równanie

$$\left(\frac{4B}{5} \right)^{\frac{1}{4}} = E^{\frac{1}{4}} \text{ czyli } E = \frac{4}{5}B \quad (26)$$

Z drugiego założenia

$$\phi(\omega) = g(\omega)$$

$$\left| \begin{array}{l} \omega = \left(\frac{4}{5}B \right)^{\frac{1}{4}} \\ \omega = E^{\frac{1}{4}} \end{array} \right| \text{ otrzymamy:}$$

Drugie równanie

$$\frac{5A^4\sqrt{5}}{4B^4\sqrt{4B}} e^{\frac{4}{5}} = \frac{C}{2\sqrt{E-D}} \quad (27)$$

Trzecie równanie

$$\int_0^{\infty} \frac{C\omega^2}{\omega^4 - D\omega^2 + E} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{A}{\omega^5} \exp\left(-\frac{B}{\omega^4}\right) d\omega \quad (28)$$

Dalsza procedura wyznaczania wielkości L , v_1 , v_2 jest pokazana w pracy [7].

Przyjmując za $L = 4,500406826$ oraz $v_1 = 1,496512384$, $v_2 = 0,602235192$

obliczamy wartość stałej C

$$C = \frac{2A\omega_0}{4\pi B} \left[\left(v - \sqrt{v^2 - 1} \right)^{1/2} + \left(v + \sqrt{v^2 - 1} \right)^{1/2} \right] \quad (29)$$

$$\left(v - \sqrt{v^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(v + \sqrt{v^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = 2,234507723 \quad (30)$$

$$C = \frac{188,1787h_s^2 0,71037\omega_1 \cdot 2,234507723}{2\pi \cdot 496,1} = h_s^2 \cdot \omega_1 \cdot 0,095826987 \quad (31)$$

$$a_0 = \sqrt{C} = 0,309559344 \cdot h_s \cdot \sqrt{\omega_1} \quad (32)$$

$$\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{4B}{5}} = 0,710370681\omega_1 \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 = \omega_0^2 = 0,504626504 \omega_1^2 \\ a_1 = \omega_0 \sqrt{2(1-v)} = 0,996506281\omega_0 = 0,707888844\omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Współczynniki (funkcji przejścia $G(s)$)	Widmo Piersona-Moskowitza
C	$0,095826987 h_s^2 \cdot \omega_1$
a_0	$0,309559344 \cdot h_s \cdot \sqrt{\omega_1}$
a_1	$0,707888844\omega_1$
a_2	$0,504626504\omega_1^2$

6. WNIOSKI

Aby rozwiązać równanie macierzowe $It\hat{o}$ postaci $\dot{X} = \tilde{A}X + \tilde{B}W$ należy przyjąć następujący schemat postępowania:

1. Zakładamy, że jest to proces dyfuzyjny
2. Należy napisać równania F-P-K (Fockera Planca Kołmogorowa)
3. Na podstawie równań F-P-K wyznaczyć cztery pierwsze momenty statystyczne:

$$m_1, m_2, m_3, m_4$$

4. Przedstawić rozwiązanie w postaci

$$\dot{X}_i = \sum_{i=0}^3 C_i U^i = C_0 + C_1 U + C_2 U^2 + C_3 U^3$$

gdzie: U^i - standardowy proces Gaussa z zerową wartością średnią i wariancją =1

5. Współczynniki C_0, C_1, C_2, C_3 należy wyznaczyć z równań na momenty statystyczne

Metoda równań Fockera-Plancka-Kołmogorowa (F.P.K.) jest jedną z metod analizy stochastycznej. W początkowej fazie zastosowań metoda ta była stosowana tylko dla wymuszeń dających się opisać procesami Markowa z wymuszeniami w postaci normalnych „białych szumów”. W badaniach dynamiki obiektów pływających wzbudzanych losowo (niekoniecznie wymuszeniami o rozkładach gaussowskich) może być stosowana metoda oparta na teorii procesów Markowa z operatorem infinitezymalnym w postaci drugiego rzędu i zastosowaniem równania F.P.K. dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa warunkowego (funkcji przejścia). Całkowanie równań F.P.K. często może sprawiać dużo trudności. Jednak w analizach układów nieliniowych gdzie występują momenty statystyczne wyższych rzędów w różnych kombinacjach można odstąpić od całkowania tych równań. Z równań F.P.K. uzyskuje się zależność funkcyjną między tymi momentami. Dość często wystarcza to do uzyskania zadowalających wyników w prowadzonej analizie. Wymagania metody konieczne do spełnienia aby składnik zależny od pierwszej pochodnej wektora stanu był liniowy (tłumienie liniowe) zostały pokonane przez modyfikację metody. Zamiast rozwiązywać równanie F.P.K. dla danego procesu, przekształca się je w równania stochastyczne, które pozwalają utworzyć równania różniczkowe dla propagacji wartości średniej i wariancji analizowanych zmiennych losowych. Zastosowanie metody filtracji pozwala na analizę dynamiki obiektów wzbudzanych losowo przez falę nieregularną o rozkładach wąskopasmowych typu widma Piersona-Moskowitza.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bellach B., *Parameter estimators in linear stochastic differential equations and their properties*, Random Vibrations and Reliability, Akademie-Verlag, Berlin, Proceedings of the IUTAM Symposium Frankfurt/Oder, pp.137-144, 1982.
- [2] Druet Cz., *Dynamika morza*, Wyd. Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2000.
- [3] Kang D., Hasegawa K., *Prediction method of hydrodynamic forces acting on the hull of a blunt-body ship in the even keel condition*, Journal of Marine Science and Technology, Vol.12, Number 1, 1-14, 2007.
- [4] Królicka A., *Multihull vessel excitations in stochastic formulation*, Polish Maritime Research, University of Technology, Faculty of Ocean Engineering & Ship Technology, No 4, Vol 15, Gdańsk 2008.
- [5] Królicka A., *Unsymmetrical movements of a multi-hull vessel treated as a linear object*, Marine Technology Transactions-Vol.18, pp.63-74, Gdańsk 2007.
- [6] Królicka A., *Application of wave spectra to mathematical model of multihull vessel*, Marine Technology Transactions, Vol.20-pp.29-45, Gdańsk 2010.
- [7] Plucińska A., Pluciński E., *Probabilistyka, Rachunek prawdopodobieństwa, Statystyka matematyczna, Procesy stochastyczne*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.
- [8] Rumianowski A., *Badania dynamiki wybranych morskich obiektów pływających*, Wyd.PG, Gdańsk 2003.
- [9] Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, Warszawa 1996.
- [10] Sobczyk K., Spencer Jr.,B.F., *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
- [11] Trębacki K., Królicka A., *External loads for multihull watercraft*, Vibrations in physical systems, Vol.XXIII-pp 371-376, Poznań 2008.