

LACHOWSKI Jan¹

WSPOMAGANA KOMPUTEROWO ANALIZA DRGAŃ OBCIĄŻONEJ LINY HIPERSPRĘŻYSTEJ

W pracy przedstawiono model numeryczny drgającej liny wykonanej z materiału hipersprężystego i obciążonej masą skupioną. Jako przykład do analizy wybrano dobrze znaną gumową linę bandży, gdzie masą skupioną jest człowiek wykonujący skok. Analizę komputerową poprzedzono prostym modelem analitycznym. Następnie wykonano analizę komputerową z wykorzystaniem systemu Abaqus. Wyznaczono amplitudę drgań liny, okres drgań tłumionych, rozkład naprężeń wzdłuż liny, wychylenie oraz przeciążenie masy skupionej na końcu liny. Analizie poddane były również zmiany energii sprężystej liny. Zależności wyznaczono przy uwzględnieniu masy własnej liny oraz tłumienia w materiale liny.

COMPUTER-AIDED ANALYSIS OF OSCILLATIONS OF HYPERELASTIC LINE UNDER LOADING

The numerical model of a hyperelastic line under loading of a concentrated mass is presented in the paper. The rubber bungee line with a jumping man has been selected as an example of the hyperelastic line. At first a simple analytical model has been used for calculation. Then computer analysis has been performed using Abaqus system. The amplitude of oscillations, the damped period of oscillations, distribution of stress along the line, displacement and acceleration of a concentrated mass were obtained. The change of the elastic energy of the line was analyzed. The mass of the line and a damping of line material were taken into consideration.

1. WSTĘP

Skoki na *bungee* zostały zainspirowane przez rdzennych mieszkańców wyspy Pentecost (Nowe Hebrydy) na Pacyfiku. Każdego roku, mężczyźni plemienia Vanuatu zamieszkującego wyspę konstruują drewnianą wieżę o wysokości ponad 20 m. Młodzi mężczyźni skaczą z bambusowych wież, zabezpieczeni lianami przywiązanymi do kostek i kolan.

Zainspirowane przez wyspiarzy współczesne skoki na *bungee* zostały pierwszy raz wykonane przez członków "The Oxford University Dangerous Sports Club". Pierwszy

¹Politechnika Świętokrzyska, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego;
25-314 Kielce; Al. Tysiąclecia PP 7.
Tel: + 48 41 34-24-437, E-mail: jlach@tu.kielce.pl

pokaz odbył się 1 kwietnia 1979 roku w Bristolu z mostu Clifton Suspension Bridge. Wydarzenie to uznaje się za początek *bungee jumping*. Guma *bungee* jest spleciona z setek cienkich lateksowych gumek.

W pracy przedstawiono analityczno-numeryczny model do dynamicznej analizy liny wykonanej z materiału hipersprężystego jakim jest guma. Do symulacji komputerowej wykorzystano komercyjny pakiet metody elementów skończonych - Abaqus

2. MECHANIKA MATERIAŁU HIPERSPRĘŻYSTEGO

2.1 Stan odkształcenia

Rozciągnięcie włókna materiału (ang. *stretch*) jest definiowane formułą

$$\lambda_i = 1 + \frac{\Delta L_i}{L_i} = 1 + \varepsilon_{nom}, \quad (1)$$

gdzie ε_{nom} jest odkształceniem nominalnym, ΔL_i jest przyrostem długości włókna, a L_i jest długością włókna w kierunku x_i . Pierwszy i drugi niezmiennik odkształcenia są określone przez rozciągnięcia w kierunkach głównych

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (2)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2. \quad (3)$$

Dla materiału nieściśliwego względna objętość J jest wielkością stałą i spełnia zależność

$$J = 1 + \frac{\Delta V}{V} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (4)$$

W przypadku liny hipersprężystej występuje jednoosiowe obciążenie i rozciągnięcia główne przybierają następującą postać

$$\lambda_1 = \lambda, \quad (5)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (6)$$

gdzie λ jest rozciągnięciem włókna w kierunku wzdłużnym liny.

2.2 Modele konstytutywne materiału hipersprężystego

Zależność naprężenia od odkształcenia dla materiałów hipersprężystych jest opisywana poprzez wykorzystanie potencjału energii sprężystej $U(\varepsilon)$ [1,2,3]

$$\sigma = \frac{\partial U(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \quad (7)$$

Przy założeniach izotropowości materiału i addytywności części dewiatorowej oraz objętościowej energii odkształcenia, energię odkształcenia można zapisać ogólnie jako sumę dwóch funkcji

$$U = f(I_1 - 3, I_2 - 3) + g(J - 1), \quad (8)$$

Powyższy ogólny wzór jest często podawany w postaci sumy wielomianów [1,3]

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i}, \quad (9)$$

gdzie: stopień wielomianu N jest stałą materiałową, a C_{ij} i D_i są zależnymi od temperatury stałymi materiałowymi. Stałe D_i określają ściśliwość materiału. Jeżeli materiał jest całkowicie nieściśliwy, wyrazy ze współczynnikami D_i są pomijane w (9).

Jeżeli zaniedbać zależność od drugiego niezmiennika I_2 otrzymuje się zredukowaną postać wielomianową energii

$$U = \sum_{i=1}^N C_{i0} (I_1 - 3)^i. \quad (10)$$

W celu opisanie typowej doświadczalnej krzywej rozciągania gumy wystarczają na ogół tylko trzy pierwsze wyrazy wielomianu (10)

$$U = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 + \dots \quad (11)$$

Model ten nosi nazwę modelu Yeoh [1,3]. Dla małych odkształceń parametr C_{10} odpowiada modułowi ścinania G . Drugi parametr C_{20} jest mniejszy o rząd wielkości i ujemny, a trzeci parametr C_{30} będzie mniejszy o dwa rzędy wielkości od C_{10} i dodatni.

Innym szczególnym przypadkiem pełnej postaci wielomianowej (9) potencjału jest model Mooney-Rivlin [10,11]

$$U = C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} (\bar{I}_2 - 3) \quad (12)$$

gdzie początkowa wartość modułu ścinania wyraża się przez współczynniki C następująco

$$G = 2(C_{10} + C_{01}) \quad (13)$$

Model Mooney-Rivlin jest wykorzystywany w tej pracy do opisu charakterystyki materiału hipersprężystego.

3. MODEL ANALITYCZNY DRGAŃ MASY NA LINIE HIPERSPRĘŻYSTEJ

3.1 Równanie ruchu masy skupionej na linie

Równanie ruchu masy skupionej M na linie hipersprężystej z uwzględnieniem tłumienia ma postać następującą

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (13)$$

gdzie x jest wychyleniem od położenia, w którym lina jest rozwinięta, ale nie napięta. Współczynnik k jest tutaj nazwany względną sztywnością liny, która określa proporcjonalność działającej siły do wydłużenia $F = k \cdot \Delta L$. Tłumienie jest proporcjonalne do prędkości i określone współczynnikiem β . Jeżeli zaniedbać tłumienie, rozwiązanie równania (13) jest dane wzorem

$$x = A \sin(\omega_0 t) \quad (14)$$

gdzie $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$. Stąd wynika dobrze znany wzór na okres drgań masy M

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (15)$$

W pierwszej połowie okresu drgań masy M ruch odbywa się pod działaniem siły sprężystości liny i siły ciężkości. W drugim półokresie ruch jest swobodnym spadkiem w polu ciężkości, ponieważ lina ulega całkowitej relaksacji naprężeń (jest całkowicie luźna). Masa skupiona M ma zadaną początkową prędkość wynikającą ze spadku swobodnego na odcinku równym długości liny L , tj. od punktu zamocowania do momentu napięcia liny.

Mając dane pole przekroju S , wydłużenie względne ΔL oraz korzystając z prawa Hooke'a można obliczyć względną sztywność na rozciąganie liny

$$k = \frac{ES}{L} \quad (16)$$

Zakładając zmianę długości liny L o 100% , czyli $\Delta L = L$, oraz stałą objętość materiału, czyli przekrój S dwa razy mniejszy, otrzymuje się nową wartość sztywności liny, czterokrotnie mniejszą $k_1 = k/4$. Dla wybranych parametrów materiałowych do analizy numerycznej (rozd. 4.2), wzór (15) daje odpowiednio $T_0 = 1,22$ s dla liny nierozciągniętej i $T_0 = 2,43$ s dla liny rozciągniętej o 100%. Obliczanie długości okresu wahań za pomocą wzoru (15) jest niepewne. Wzór ten daje tylko dolną i górną granicę oszacowania okresu drgań.

3.2 Równanie ruchu masy na linie z uwzględnieniem tłumienia

Równanie ruchu masy skupionej M na linie hipersprężystej z uwzględnieniem tłumienia (13) można przekształcić do postaci

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (17)$$

gdzie tłumienie jest określone współczynnikiem $2b = \frac{\beta}{M}$, który ma wymiar T^{-1} .

Rozwiązaniem równania (17) jest wyrażenie

$$x(t) = A \cdot \exp(-bt) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - b^2} t\right) \quad (18)$$

Miarą tłumienia jest logarytmiczny dekrement tłumienia D , który oblicza się z dwóch kolejnych amplitud

$$D = \ln \frac{A_1}{A_2} = bT_0 \quad (19)$$

Natomiast tłumienie względne ψ jest ilorazem pracy siły tłumienia i energii sprężystej w czasie jednego okresu drgań [2]

$$\psi = \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2} \quad (20)$$

Jeżeli przyjąć zmiany tłumienia względnego ψ gumy w przedziale $\langle 0,3, 0,7 \rangle$ [2], to dekrement tłumienia zmienia się odpowiednio od 0,18 do 0,60.

Po uwzględnieniu tłumienia z (18) wynika okres drgań

$$T = T_0 \frac{2\pi}{\sqrt{(2\pi)^2 - (D)^2}} \quad (21)$$

Zmiana okresu drgań spowodowana tłumieniem jest na ogół niewielka i w rozpatrywanych w tej pracy zagadnieniach nie przekracza 1%. Do symulacji komputerowej drgań swobodnych liny wybrano wartość $\psi = 0,5$, co jest wartością przeciętną dla materiałów typu gumy [2].

3.3 Uwzględnienie masy liny w okresie drgań

Wpływ masy liny na okres drgań polega na wydłużeniu czasu trwania pierwszego półokresu o wartość ΔT [4]

$$T_1 + \Delta T = \pi \sqrt{\frac{\left(M + \frac{1}{3}m\right)}{k}} \quad (22)$$

Uwzględniając okres drgań niezaburzony przez masę liny (15) można przepisać do postaci

$$1 + \frac{\Delta T}{T_1} = \sqrt{1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M}} \quad (23)$$

Dla masy liny $m=60\text{kg}$ i masy ciała skupionego $M=75\text{kg}$, okres zwiększył się o 13%.

4. ANALIZA NUMERYCZNA

4.1 Metoda elementów skończonych i program Abaqus

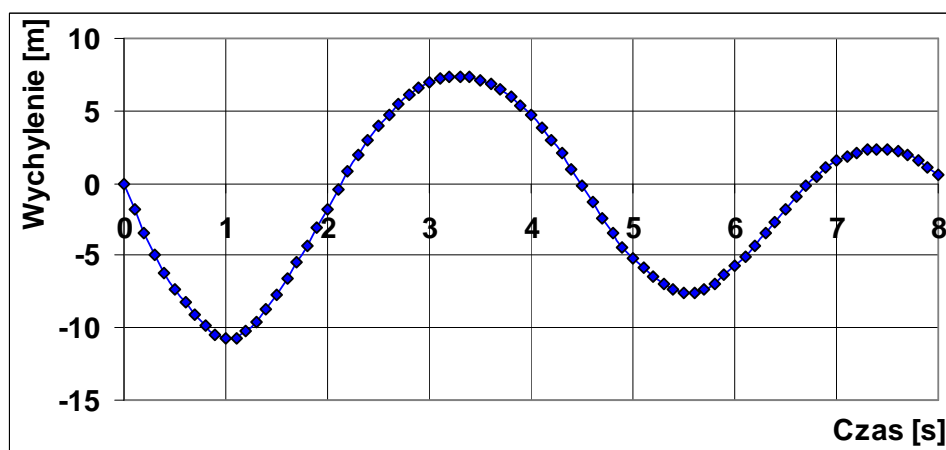
Analizę numeryczną wykonano na modelu składającym się z elementów skończonych typu prętowego dwuwęzłowych [5,6]. W celu wyboru dokładności siatki wykonano serie obliczeń dla modelu liny podzielonej na 100, 200, 400 i 800 elementów. Analiza numeryczna drgań pokazała, że liczba 400 elementów dla liny o długości 20 m jest całkowicie wystarczająca. Tę liczbę elementów przyjęto jako podstawową przy prowadzeniu symulacji.

Do symulacji drgań liny hipersprężystej z masą skupioną użyto procedury Abaqus/Explicit. Procedura całkuje równania ruchu w sposób jawny po czasie korzystając z metody opartej na różnicach centralnych [6,7]. Przyrost czasu w Abaqus/Explicit jest określany w pełni automatycznie przez program i nie wymaga interwencji użytkownika. Program oblicza aktualny przyrost czasu Δt jako iloraz maksymalnego wymiar elementu skończonego i prędkości podłużnej fali sprężystej w materiale liny. Taki wybór przyrostu czasu zapewnia stabilność metody całkowania Explicite [6].

4.2 Analiza numeryczna drgań liny

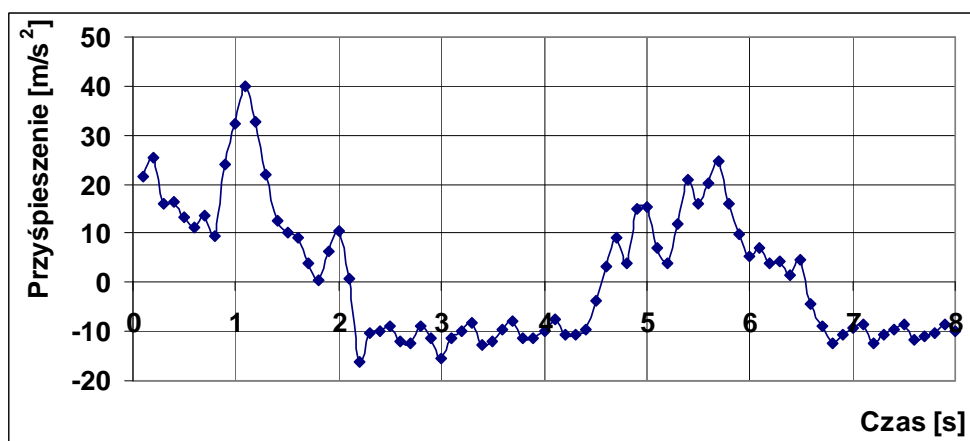
Analizę numeryczną wykonano przy założeniu następujących parametrów liny i masy skupionej: długość liny 20 m, przekrój liny 25 cm^2 , gęstość materiału $1,2\text{ g/cm}^3$, względne tłumienie drgań $\psi = 0,5$, masa skupiona $M = 75\text{ kg}$. Materiał liny jest opisany modelem Money-Rivlin (12), w którym przyjęto parametry $C_{10} = 0,6\text{ MPa}$ i $C_{01} = 0,06\text{ MPa}$, co oznacza początkowy moduł sztywności $G = 1,3\text{ MPa}$ i materiał o średniej sprężystości [8,9]. Symulacja została przeprowadzona od momentu, gdy lina jest całkowicie rozwinięta, a masa skupiona M ma prędkość wynikającą ze swobodnego spadku od zamocowania do całkowitej długości liny. W tym przypadku prędkość początkowa masy skupionej wynosi 20 m/s^2 . Symulacje komputerowe prowadzono dla takich czasów, aby otrzymać przynajmniej dwa pełne okresy drgań. Poniżej wyniki są przedstawione dla czasu $t = 8\text{ s}$.

Wychylenie masy skupionej od położenia (Rys.1) pokazuje wyraźnie, że pełny jeden okres ruchu składa się z dwóch części: ruchu pod działanie siły sprężystej liny i siły ciężkości oraz drugiej części będącej swobodnym ruchem w polu ciężkości.



Rys. 1. Wychylenie masy skupionej na końcu liny dla dwóch pierwszych okresów drgań

Pierwszy półokres drgań wyniósł $T_1 = 2,13$ s, a drugi półokres $T_2 = 2,35$ s. Razem czas trwania pierwszego okresu drgań $T = 4,48$ s. Odpowiednio dla drugiego okresu drgań te wartości wynoszą: $T_1 = 2,25$ s, $T_2 = 1,37$ s, $T = 3,62$ s. Pierwszy półokres, wynikający z działaniem siły sprężystej, zmienił się niewiele, natomiast drugi półokres wynikający ze swobodnego spadku wyraźnie się zmniejszył. Prawidłowość ta powtarza się dla następnych okresów drgań masy skupionej na linie.

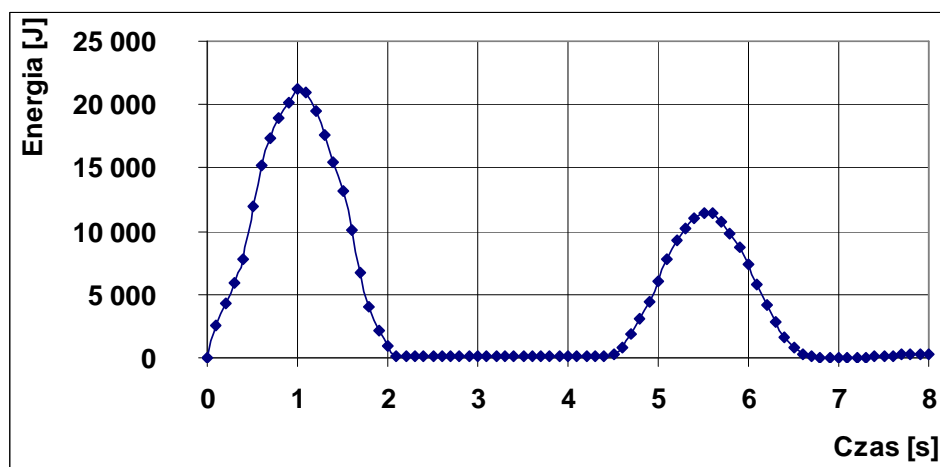


Rys. 2. Przyspieszenie masy skupionej M dla dwóch pierwszych okresów drgań

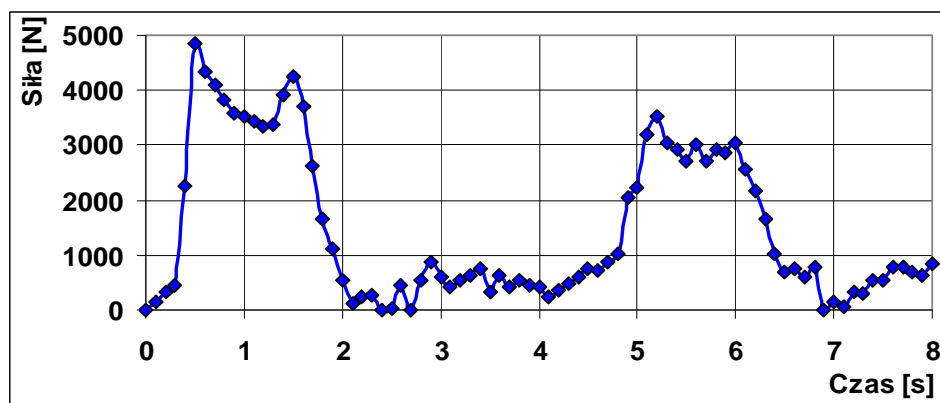
Wyznaczona prędkość chwilowa masy skupionej M nie wykazuje już tak gładkiego przebiegu funkcyjnego, jak wychylenie. Jeszcze mniej regularne są zmiany przyspieszenia (Rys. 2). Maksymalna wartość przyspieszenia masy skupionej M wyniosła 40m/s^2 . Oznacza to przeciążenie równe $3G$. Dla skoków na bandzi zakłada się maksymalne

przeciążenia od 2,5G do 3,5G. Obliczona wartość przeciążenia znalazła się w granicach dopuszczalnych wartości. Dla porównania przeciążenia dopuszczalne dla astronautów wynoszą 5G (wg NASA), a dla pilotów samolotów myśliwskich chwilowe przeciążenia dopuszczalne wynoszą 6G.

Zmiany energii sprężystej i zmiany amplitudy drgań w kolejnych okresach drgań są związane ściśle z tłumieniem w materiale liny. Tłumienie względne równe 0,5 widoczne jest na wykresie zależności energii sprężystej liny od czasu (Rys. 3), gdzie energia sprężysta zmniejsza się o 50%.



Rys. 3. Zależność energii sprężystej liny od czasu



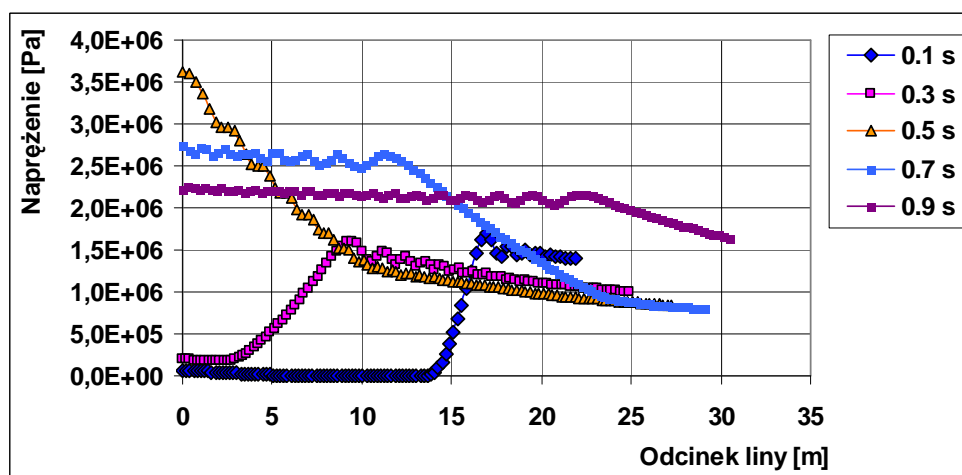
Rys. 4. Zmiany siły reakcji w punkcie zamocowania liny

Energia sprężysta przyjmuje wartość maksymalną przy maksymalnym rozciągnięciu liny (Rys. 3). Jednocześnie w tym momencie energia kinetyczna liny i masy skupionej przyjmuje wartość zero.

Analiza numeryczna siły reakcji w punkcie zamocowania liny wykazała duże chwilowe wartości siły (Rys. 4), które nie można oszacować analitycznie. W czasie pierwszego

okresu widać wyraźne dwa maksima o wartościach 4834 N i 4260 N. Wartości te znacznie przekraczają siłę, która wynikałaby ze statycznego obciążenia sumą masy liny i masy M . Jeżeli przyjąć masę liny $m = 60$ kg oraz masę $M = 75$ kg, co daje obciążenie 1350 N, to wyznaczona siła reakcji jest 3,5 raza większa. Uwzględnienie tego faktu powinno stanowić to istotny element bezpieczeństwa przy skokach na linie bandzi.

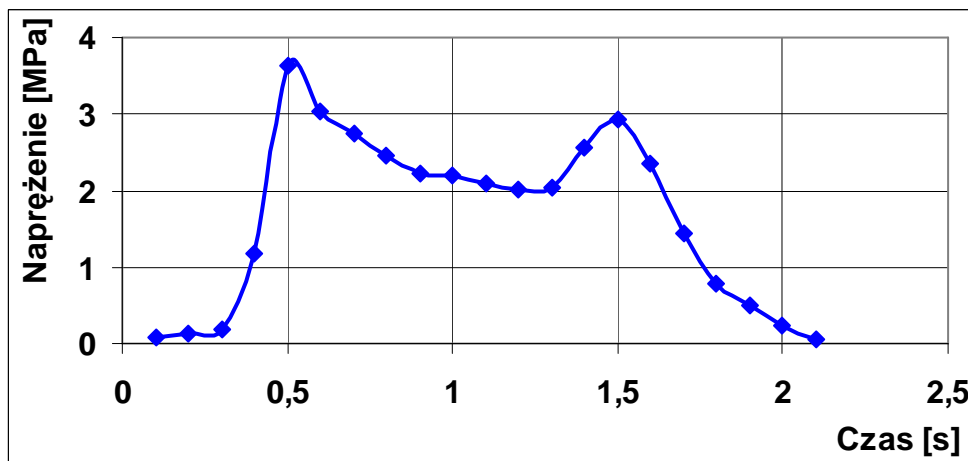
Podwójne maksimum na wykresie siły reakcji, które wystąpiło w czasie pierwszego półokresu jest związane z propagacją fali sprężystej podłużnej. Fala jest inicjowana w momencie szarpnięcia liny przez masę skupioną i dociera do zamocowania po około 0,5 s (Rys. 5), a następnie odbija się dwukrotnie od końców liny i powoduje drugie maksimum w czasie około 1,5 s. Ponowny efekt fali sprężystej, ale trochę słabszy można zauważyć dla drugiego okresu drgań.



Rys. 5. Rozkład naprężeń w linie czasie od 0,1s do 0,9s

Siła reakcji w punkcie zamocowania jest powiązana z naprężeniami na odcinku liny przylegającym do zamocowania. Zależność naprężenia na tym odcinku pokazuje rysunek 6. Podobnie jak dla siły reakcji występują dwa maksima dla pierwszego okresu. Można obliczać siłę reakcji z naprężenia lub odwrotnie, ale należy uwzględnić zmianę pola przekroju liny wynikającą z wydłużenia przy założeniu nieściśliwości materiału.

Maksymalne wartości naprężenia w pobliżu zamocowania ujawniają niebezpieczeństwo związane z wytrzymałością liny na rozciąganie. Maksymalne wartości naprężenia nie można wyznaczyć analitycznie lecz tylko na drodze numerycznej.



Rys. 6. Zmiana napężenia w linie w pobliżu zamocowania

5. WNIOSKI

Porównanie wyników modelu analitycznego i wyników obliczeń numerycznych prowadzi do wniosku, że analiza numeryczna jest konieczna do wiarygodnej oceny naprężeń w linie w czasie drgań. Rozkład naprężeń w linie jest silnie niejednorodny i bardzo szybko zmieniający się w czasie. Dodatkowo rozpatrywany materiał hipersprężysty ma nieliniową charakterystykę i wykazuje duże tłumienie, co silnie wpływa na obliczane zmienne mechaniczne. Ponieważ stan naprężeń i odkształceń w linie hipersprężystej decyduje o bezpieczeństwie osób wykonujących skoki, można zalecać, aby obliczenia analityczne mechaniki skoku były wsparte obliczeniami numerycznymi.

Równie ważne jest też oddziaływanie przeciążenia na osobę wykonującą skok. Ponieważ wykres prędkości i przyspieszenia wykazuje wyraźne odstępstwa od sinusoidy, numerycznie obliczanie przeciążenia jest bardziej wiarygodne.

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Jemioło S.: *Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002.
- [2] Pękalak M., Radkowski S.: *Gumowe elementy sprężyste*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa 1989.
- [3] Abaqus/ Abaqus Theory Manual, ver. 6.7, ABAQUS, Inc.2007.
- [4] Coulson C.A, Jeffrey A.: *Fale, modele matematyczne*, WNT, Warszawa 1982.
- [5] Abaqus/ CAE User's Manual, ver. 6.7, ABAQUS, Inc.2007.
- [6] Abaqus/Abaqus Analysis Manual, ver. 6.7, ABAQUS, Inc.2007.
- [7] Ralston A.: *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975.
- [8] www.matweb.com, baza MatWeb – Material Property Data.
- [9] Roesler J., Horders H., Baeker M.: *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*, Springer Berlin Heidelberg - NY, 2007.