Stanisław Krzyżaniak
Instytut Logistyki i Magazynowania.

O skutkach błędnej interpretacji wskaźnika poziomu obsługi przy wyznaczaniu zapasu zabezpieczającego (cz. II)[1]

W pierwszej części artykułu [3] przedstawiono istotę różnicy w definiowaniu i obliczaniu poziomu obsługi określającego dostępność zapasu w ujęciu probabilistycznym (POP – prawdopodobieństwo obsłużenia popytu) oraz ilościowym (SIR – stopień ilościowej realizacji). Ze względów poglądowych zagadnienia te przedstawiono dla przypadku, w którym rozkład popytu można opisać rozkładem Poisson'a.

Niniejszy artykuł rozwija tę kwestię, a problem zostanie zaprezentowany dla rozkładu normalnego, znajdującego zastosowanie w przypadku dóbr szybko rotujących. Rozkład ten jest jednocześnie powszechnie stosowany w różnego typu aplikacjach i systemach informatycznych wspomagających zarządzanie zapasami.

Jak wskazano we wcześniejszych publikacjach z tego zakresu, kluczową wielkością niezbędną do wyznaczenia wskaźnika SIR jest oczekiwana liczba braków w cyklu uzupełniania zapasów.

W części pierwszej artykułu do obliczenia oczekiwanej liczby braków wykorzystano formułę opartą na sumowaniu iloczynów prawdopodobieństw wystąpienia określonych wielkości popytu w cyklu uzupełniania zapasu p (P_T), przewyższających poziom zapasu dysponowany w chwili rozpoczęcia cyklu (ZI) przez wielkości różnic pomiędzy nimi, a zapasem ZI (czyli rzeczywistymi wielkościami braków):

$$\mathrm{nb(ZI)} = \sum \mathrm{lb(ZI)} \cdot \mathrm{p(lb)} = \sum_{P_T \geq ZI}^{\infty} (P_T - ZI) \cdot p(P_T)$$

W przypadku rozkładu normalnego formuła ta może zostać uogólniona do obliczania standaryzowanej liczby braków (dla rozkładu o średnim popycie równym „0" i odchyleniu standardowym równym „1". Wielkość ta jest zależna wyłącznie od współczynnika bezpieczeństwa ω i jest oznaczania jako I (ω).

$$I(\omega) = \int_{z=\omega}^{\infty} (z-\omega) \cdot f(z)dz$$

gdzie, w ogólnym przypadku, „z" jest zmienną standaryzowaną rozkładu normalnego:

$$z = \frac{x - \overline{X}}{\sigma_x} \quad [1]$$

Oczekiwana liczba braków w cyklu uzupełnienia zapasów, dla którego odchylenie standardowe popytu jest równe σ_{PT} oblicza się ze wzoru:

$$\mathrm{nb}\ (\omega) = \mathrm{I}\ (\omega) \times \sigma_{PT.}$$

Funkcja I (ω) nie jest bezpośrednio dostępna (jako „wbudowana" w arkusz kalkulacyjny EXCEL, ale jej przekształcenia pozwalają ją wyrazić za pomocą funkcji dostępnych.

Poniżej przedstawiono te przekształcenia:

$$I(\omega) = \int_{z=\omega}^{\infty} z \cdot f(z)dz - \int_{z=\omega}^{\infty} \omega \cdot f(z)dz$$

$$I(\omega) = \int_{z=\omega}^{\infty} z \cdot f(z)dz - \omega \cdot \left[1 - \int_{-\infty}^{\omega} f(z)dz\right]$$

$$\int_{\omega}^{\infty} z \cdot f(z)dz = \int_{\omega}^{\infty} z \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\frac{z^2}{2} = t, \quad zatem \ \ \omega = \sqrt{2 \cdot t}$$

$$zdz = dt$$

$$\int_{\omega}^{\infty} z \cdot f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t} dt = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left| e^{-\frac{z^2}{2}} \right|_{\omega}^{\infty} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \left[0 - e^{-\frac{\omega^2}{2}}\right] = f(\omega)$$

Zatem:

$$I(\omega) = f(\omega) - \omega \cdot [1 - f(\omega)]$$

Powyższą funkcję można łatwo obliczyć w arkuszu EXCEL korzystając z jego standardowych funkcji:

[1] Artykuł ten (wraz z jego pierwszą częścią, publikowaną w „Logistyce" nr 6/2010) jest piątym z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami". W numerze 5/2008 „Logistyki" Autor zamieścił pierwszy artykuł z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami", który mówił o znaczeniu prawidłowego określania czasu cyklu uzupełnienia. Następne artykuły z tego cyklu dotyczyły: skutków błędów popełnianych przy wyznaczaniu odchylenia standardowego popytu w cyklu uzupełniania zapasu („Logistyka" 6/2008); skutków błędnego założenia o typie rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu („Logistyka" 1/2009); wpływu zmienności czasu cyklu uzupełnienia zapasu na poprawność wnioskowania o zależności pomiędzy zapasem zabezpieczającym, a poziomem obsługi („Logistyka" 2/2009). Niniejszy artykuł (cz. 1 i 2) stanowi kontynuację cyklu, a jego celem jest omówienie zasadniczych różnic pomiędzy dwiema definicjami poziomu obsługi, odnoszącymi się do zarządzania zapasami i wskazania ewentualnych skutków wynikających z ich błędnej interpretacji (*przyp. red.*).

41-52 Magazynowanie NR 1:00-00 Magazynowanie NR 6 2/18/11 12:11 PM Page 42

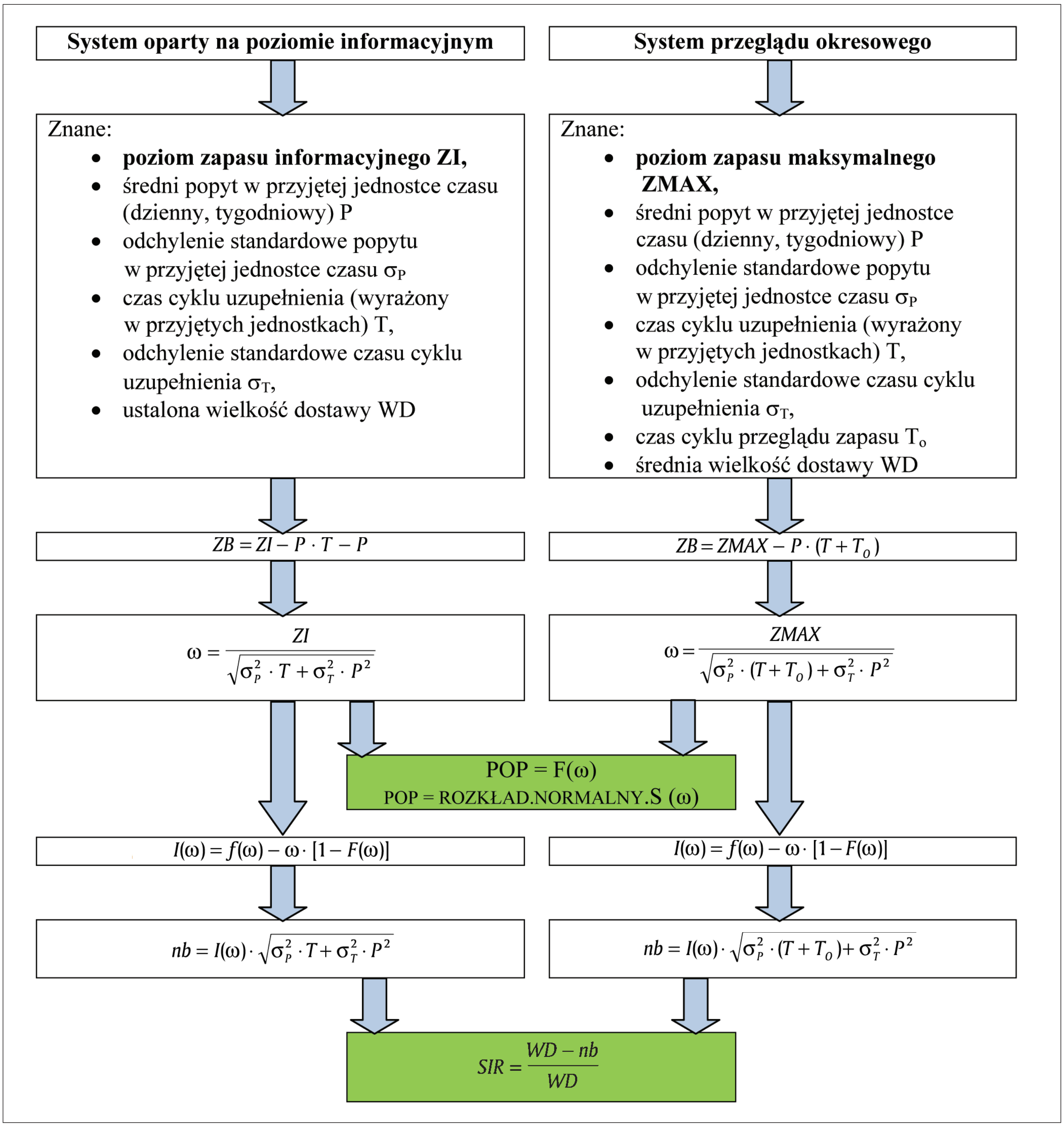
$I(\omega) = ROZKŁAD.NORMALNY\ (\omega;\ 0;\ 1;\ fałsz) -$
$- \omega \cdot [1 - ROZKŁAD.NORMALNY.S(\omega)]$

Dzięki temu, znając określony parametr systemu odnawiania zapasu determinujący poziom zapasu zabezpieczający ZB, można w łatwy sposób obliczyć oczekiwaną liczbę braków, a stąd (przy znajomości średniej wielkości dostawy), oszacować oczekiwany stopień ilościowej realizacji. Schemat takich obliczeń przedstawia rysunek 1.

Zastosowanie schematu przedstawionego na rysunku 1 oznacza raczej pasywną postawę wobec problemu poziomu obsługi, którą można streścić słowami: „oto mamy taki zapas zabezpieczający, zobaczmy jaki z niego wynika poziom obsługi".

Bardziej interesujące i prawidłowe podejście, to postawienie celu: „chcemy zapewnić określony poziom obsługi" i określenie warunków jego osiągnięcia (czyli: „jaki powinien być poziom zapasu zabezpieczającego").

Zadanie to jest o tyle trudniejsze, że funkcji odwrotnej do I (ω) (I=f (ω)) nie da się przedstawić dokładnie w postaci funkcyjnej. Podejmowane są różne próby określenia funkcji przybliżonych, które – przynajmniej w pewnych przedziałach – mogłyby zapewnić wystarczającą dokładność oszacowania np. [1].



Rys. 1. Schemat obliczania oczekiwanych wartości wskaźników POP i SIR przy znanych charakterystykach popytu, a także parametrach systemów odnawiania zapasu.

41-52 Magazynowanie NR 1:00-00 Magazynowanie NR 6 2/18/11 12:11 PM Page 43

Funkcją bardzo dobrze opisującą zależność $\omega = f(I)$ jest funkcja zaproponowana przez A. E. Silvera, F. D. Pyke'a i R. Petersona [4].

$$\omega(I) = \frac{a_0 + a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2 + a_3 \cdot k^3}{b_0 + b_1 \cdot k + b_2 \cdot k^2 + b_3 \cdot k^3 + b_4 \cdot k^4}$$

gdzie:

$$k = \sqrt{ln\left(\frac{25}{I^2}\right)}, \quad \left(I = \frac{nb}{\sigma_{PT}}\right)$$

stałe a_i, b_j, przyjmują wartości:

a_0 = – 5,392556	b_0 = 1,000000
a_1 = 5,6211054	b_1 = – 0,72496485
a_2 = -3,8836830	b_2 = 0,507326622
a_3 = 1,0897299	b_3 = 0,0669136868
	b_4 = – 0,00329129114

Rysunek 2 przedstawia schemat postępowania zmierzającego do wyznaczania zapasu zabezpieczającego, przy założeniu, że podany poziom obsługi jest interpretowany jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu lub jako stopień ilościowej realizacji.

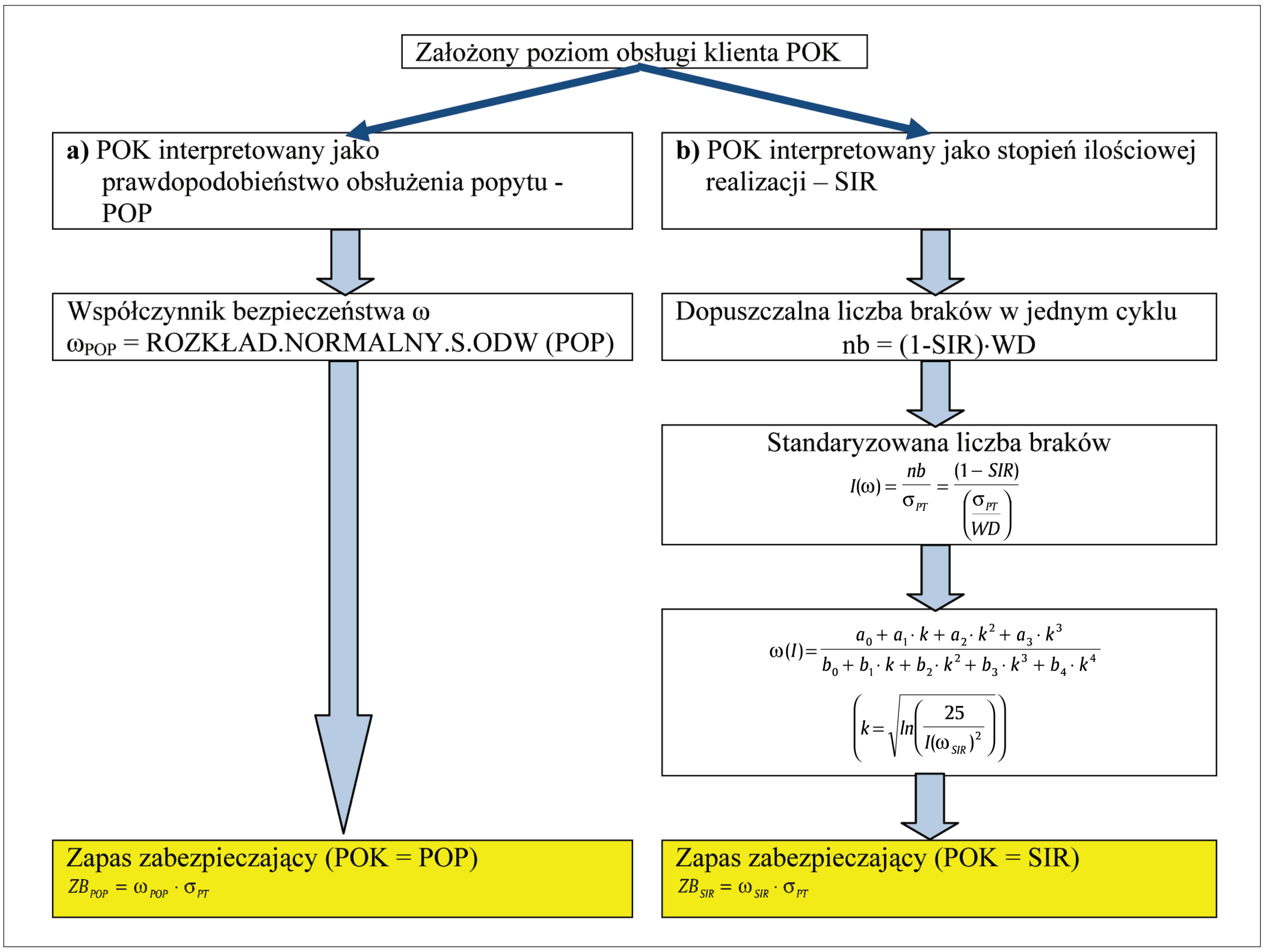
Podejmując wyznaczanie zapasu zabezpieczającego i wynikających z niego parametrów sterujących odnawianiem zapasu (odpowiednio: zapasu informacyjnego lub zapasu maksymalnego) w oparciu o założony poziom obsługi klienta (POK), można popełnić dwa rodzaje błędów:

- przyjęcie jako POK prawdopodobieństwa obsłużenia popytu POP, podczas gdy intencją definiującego poziom obsługi był stopień ilościowej realizacji (SIR)
- przyjęcie jako POK stopnia ilościowej realizacji SIR, podczas gdy intencją definiującego poziom obsługi było przyjęcie prawdopodobieństwa obsłużenia popytu (POP).

Skutkiem pierwszego błędu jest zawyżenie zapasu i ponoszenie z tego tytułu nieuzasadnionych kosztów. Towarzyszy temu także zawyżenie wskaźnika SIR, choć zazwyczaj w nieznacznym stopniu, czasami trudnym do zaobserwowania. Drugi błąd skutkuje zaniżeniem rzeczywistego poziomu obsługi POP (wobec oczekiwanego), objawiającym się znaczącym zwiększeniem częstości występowania braków w zapasie. W praktyce obserwuje się go znacznie rzadziej, niż w przypadku pierwszego błędu.

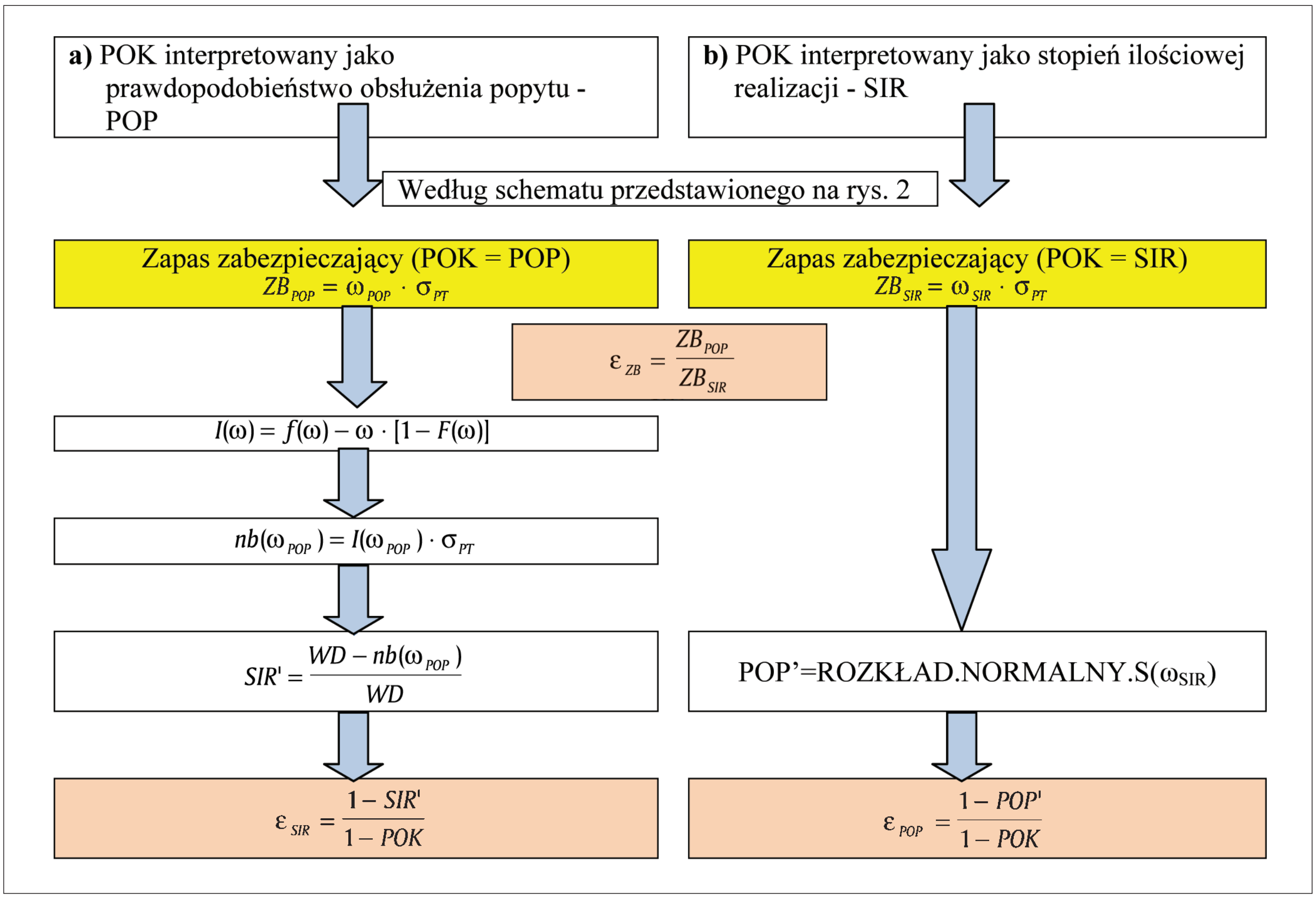
Za miary skutków obu błędów można przyjąć odpowiednio:

- dla pierwszego błędu – stosunek wielkości zapasów zabezpieczających (w rzeczywistości jest to stosunek współczynników bezpieczeństwa) wynikających z sposobów interpretacji poziomu obsługi: $\varepsilon_{SIR} = \frac{1 - SIR'}{1 - POK}$



Rys. 2. Schemat wyznaczania zapasu zabezpieczającego, przy założeniu, że podany poziom obsługi jest interpretowany jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (a) lub jako stopień ilościowej realizacji (b).

41-52 Magazynowanie NR 1:00-00 Magazynowanie NR 6 2/18/11 12:11 PM Page 44



Rys. 3. Schemat obliczania rzeczywistych wartości poziomu obsługi liczonego według wskaźników SIR i POP, przy założeniu, że podany poziom obsługi jest interpretowany jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (a) lub jako stopień ilościowej realizacji (b).

- dla drugiego błędu:
  - stosunek rzeczywistej wartości wskaźnika braków (1-SIR") do wartości oczekiwanej (zgodnej z założonym poziomem POK: 1-POK): $\varepsilon_{SIR} = \frac{1 - SIR'}{1 - POK}$ (ile razy **więcej** będzie braków)
  - stosunek rzeczywistej wartości prawdopodobieństwa wystąpienia braków (1-POP") do wartości oczekiwanej (zgodnej z założonym poziomem POK: 1-POK): $\varepsilon_{POP} = \frac{1 - POP'}{1 - POK}$ (ile razy **częściej** wystąpią braki).

Podejmując próbę oceny wpływu różnych czynników na wartości wskaźników ε_{ZB}, ε_{SIR}, ε_{POP} zauważono (na podstawie schematu przedstawionych na rysunku 2), że kluczowymi zmiennymi wpływającymi na te wartości są: poziom obsługi POK oraz stosunek odchylenia standardowego popytu w cyklu uzupełnienia zapasu do wielkości dostawy „u" $\left(u = \frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$.

Współczynnik „u" można przedstawić w innej postaci:

$$u = \frac{\sigma_{PT}}{WD} = \frac{\sigma_{PT}}{P \cdot T} \cdot \frac{P \cdot T}{WD} = \frac{\nu_{PT}}{\alpha_{WD}}$$

gdzie:

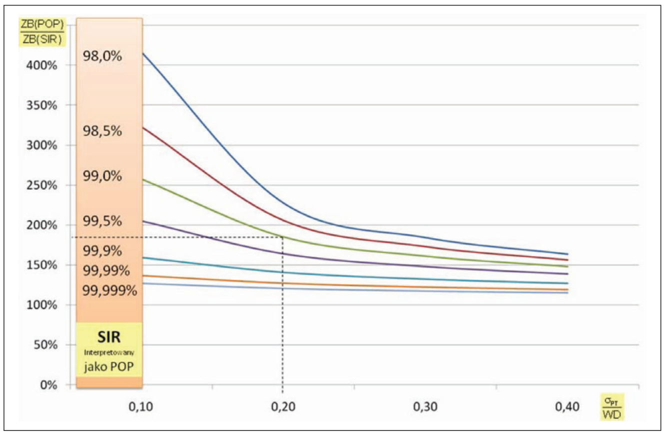
$\nu_{PT} = \frac{\sigma_{PT}}{P \cdot T}$ – współczynnik zmienności popytu w cyklu uzupełnienia zapasu,

$\alpha_{WD} = \frac{WD}{P \cdot T}$ – wskaźnik wskazujący na to, w jakim stopniu jedna dostawa pokrywa zapotrzebowanie w cyklu uzupełnienia zapasu.

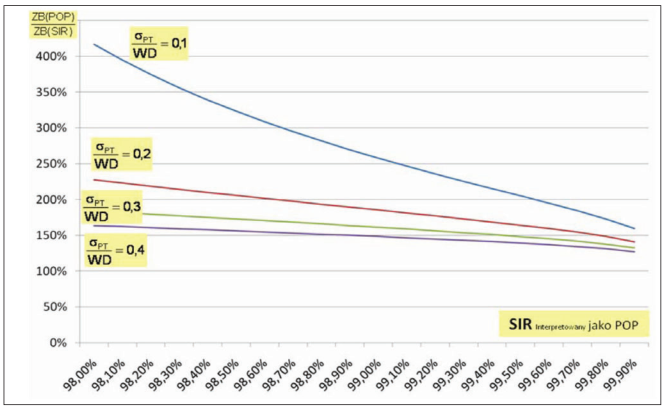
Rysunki 4 i 5 prezentują zależność wskaźnika ε_{ZB} od ilorazu $\left(\frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$ oraz poziomu obsługi SIR, rozumianego w tym przypadku (błąd pierwszego typu) jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu POP. Przykładowo, dla u=0,2 (na przykład współczynnik zmienności popytu w cyklu uzupełnienia zapasu ν_{PT}=0,3, a dostawa stanowi 150% zapotrzebowania w tym cyklu – $\alpha_{WD} = \frac{WD}{P \cdot T} = 1{,}5$) przyjęcie poziomu obsługi równego 99% jako POP zamiast SIR oznacza nadmiar zapasu rzędu 85% $\left(\varepsilon_{ZB} = \frac{ZB_{POP}}{ZB_{SIR}} \approx 185\%\right)$.

Rysunek 4 pokazuje, że szczególnie krytyczne są niskie wartości współczynnika „u" – poniżej 0,2, a więc w przypadku stabilnych przebiegów zmian popytu (niewielki współczynnik zmienności $_{PT}$), lub stosunkowo dużych dostaw, pokrywających w dużym stopniu zapotrzebowanie w cyklu uzupełnienia zapasu. Należy jednak zauważyć, że wpływ ten maleje ze wzrostem poziomu obsługi, co wyraźnie pokazuje rysunek 5.

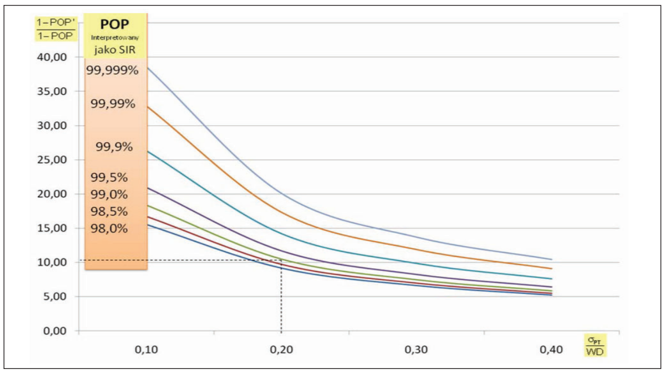
41-52 Magazynowanie NR 1:00-00 Magazynowanie NR 6 2/18/11 12:11 PM Page 45



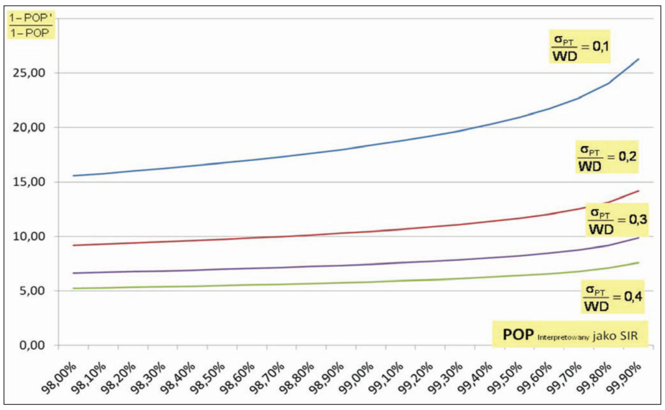
Rys. 4. Wpływ współczynnika „u” $\left(\frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$ na wzrost zapasu zabezpieczającego (dla różnych wielkości poziomu obsługi SIR, błędnie interpretowanego jako POP).



Rys. 5. Wpływ poziomu obsługi SIR (błędnie interpretowanego jako POP) na wzrost zapasu zabezpieczającego (dla różnych wartości współczynnika „u” $\left(\frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$).



Rys. 6. Wpływ współczynnika „u” $\left(\frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$ na wzrost częstotliwości występowania braku w zapasie, (dla różnych wielkości poziomu obsługi POP, błędnie interpretowanego jako SIR).



Rys. 7. Wpływ poziomu obsługi POP (błędnie interpretowanego jako SIR) na wzrost częstotliwości występowania braku w zapasie (dla różnych wartości współczynnika „u” $\left(\frac{\sigma_{PT}}{WD}\right)$.

Błąd tego typu skutkuje wyższym poziomem obsługi SIR, zawyżonym w stosunku do poziomu założonego. Dostrzeżenie tego wzrostu, mogące stanowić sygnał o popełnionym błędzie jest jednak praktycznie niemożliwe, gdyż dla założonego poziomu SIR powyżej 99% (a takie zazwyczaj poziomy przyjmuje się dla tego wskaźnika) rząd zawyżenia będzie mniejszy niż 1%.

Rysunki 6 i 7 prezentują zależność wskaźnika ε_{POP} od współczynnika „u” oraz poziomu obsługi POP, rozumianego w tym przypadku (błąd drugiego typu) jako stopień ilościowej realizacji SIR. Przykładowo, dla u=0,2 przyjęcie poziomu obsługi równego 99% jako SIR zamiast POP oznacza, że brak w zapasie będzie się zdarzał ponad 10 razy częściej, niż to zakładano (rzeczywiste prawdopodobieństwo obsłużenia popytu POP≈89,5%).

Również w tym przypadku negatywne skutki błędnej interpretacji poziomu obsługi są szczególnie znaczące dla małych wielkości współczynnika „u” z tym, że efekt ten jest tym większy, im wyższy jest ustalony poziom obsługi.

Podsumowanie

Przestawione wyniki analiz wskazują na znaczenie błędów popełnianych przy definiowaniu i interpretowaniu poziomu obsługi odniesionego do zarządzania zapasami.

Najczęściej spotykanym błędem jest obliczanie zapasu zabezpieczającego w oparciu o formuły właściwe dla poziomu obsługi definiowanego jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu, podczas gdy – w założeniach – poziom obsługi miał oznaczać stopień ilościowej realizacji. Skutkiem tego błędu jest niepotrzebne zawyżenie poziomu tego wskaźnika (choć zazwyczaj nieznaczne i trudno dostrzegalne), kosztem znacznego zwiększenia zapasu zabezpieczającego.

Popełnienie błędu drugiego typu (wyznaczenie zapasu zabezpieczającego w oparciu o formuły właściwe dla poziomu obsługi definiowanego jako stopień ilościowej realizacji, podczas gdy poziom obsługi miał oznaczać prawdopodobieństwo obsłużenia popytu) oznacza w konsekwencji niższy niż założony, rzeczywisty poziom obsługi.

Wydaje się, że jedną z przyczyn popełniania opisanych w artykule błędów jest to, że oba wskaźniki są wyrażane w tej samej mierze – procentowo. W tej sytuacji, informacja mówiąca, że poziom obsługi ma być równy na przykład 98%, jest bez dodatkowego wyjaśnienia niewystarczająca do właściwej interpretacji. <u>Rozwiązaniem mogłoby być rozróżnienie obu definicji także w formie wyrażania charakteryzujących je wartości.</u> I tak, poziom obsługi rozumiany jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (POP), wyrażany byłby jako prawdopodobieństwo, a więc na przykład POK (POP)=0,98, a stopień ilościowej realizacji (SIR) w ujęciu procentowym – POP (SIR)=98%.

Literatura

1. Benjamin Jack. R., Cornell C. Allin, *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977.
2. Krzyżaniak S., Poziom obsługi w gospodarce zapasami, „Logistyka” nr 1/2003.
3. Krzyżaniak S., O skutkach błędnej interpretacji wskaźnika poziomu obsługi przy wyznaczaniu zapasu zabezpieczającego (cz. I), „Logistyka” nr 6/2010.
4. Silver A. E., Pyke F. D. Peterson R. *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*,” 1998 za: Ronald S. Tibben-Lembke *Setting Safety Stock Using a Fill Rate*, University of Nevada, Reno, April 27, 2009 (http://www. business. unr. edu/faculty/rtl/463/FillRate. pdf).