

Romuald Swarczewicz

Odwzorowanie logistyczne

W rozwoju teorii chaosu zasadniczą rolę odegrało tzw. odwzorowanie logistyczne. Takie sformułowanie zostało użyte przez matematyka Jameka Yorke i biologa Roberta Mayę dla wariantu zależności liniowej prostego modelu matematycznego wzrostu populacji. W procesie rozwoju populacji, logistyka jest regulatorem utrzymującym wzrost populacji w pewnych granicach. Odwzorowanie logistyczne sprawdza się nie tylko przy prognozowaniu liczebności populacji.

Mitchell Feigenbaum wypracował teorię uniwersalności, wg której modele matematyczne nieliniowych procesów dynamicznych, zarówno biologiczne, ekonomiczne czy też fizyczne, przebiegają w ten sam sposób. Odwzorowanie logistyczne jest godne poznania, gdyż pozwala wyjaśnić osobliwe przebiegi procesów przy planowanych parametrach przepływu.

Najprostszym równaniem liniowym określającym przyrost populacji jest $x_{n+1} = rx_n$, gdzie r – współczynnik wzrostu populacji, x_n – wielkość populacji w okresie n . Taka funkcja liniowego wzrostu prowadzi do nieskończonego powiększania się populacji. Realistyczna funkcja powinna rosnąć stromo, gdy populacja jest mała, maleć do zera dla wartości pośrednich i raptownie spadać, kiedy populacja jest bardzo duża. Takie wymagania może spełniać wiele różnych równań, ale najprostszym jest modyfikacja dotychczasowej funkcji liniowej

$$x_n = rx(1-x)$$

Człon $(1-x)$ utrzymuje populację wewnątrz granic dlatego, że gdy x rośnie, jej wielkość maleje. Populacja w tym matematycznym modelu przedstawiona

jest w postaci ułamka o wartościach między 0 i 1, a więc jako procent maksymalnej populacji całkowitej. Równanie to jest nazywane „iteracyjnym”, ponieważ wynik z poprzedniego okresu jest potrzebny, aby uzyskać wynik w okresie następnym, odwzorowanie logistyczne jest więc „pętlą sprzężenia zwrotnego”. Wartość do której zbliża się X_n , w miarę powtarzania wyliczenia równania, nazywana jest atraktorem.

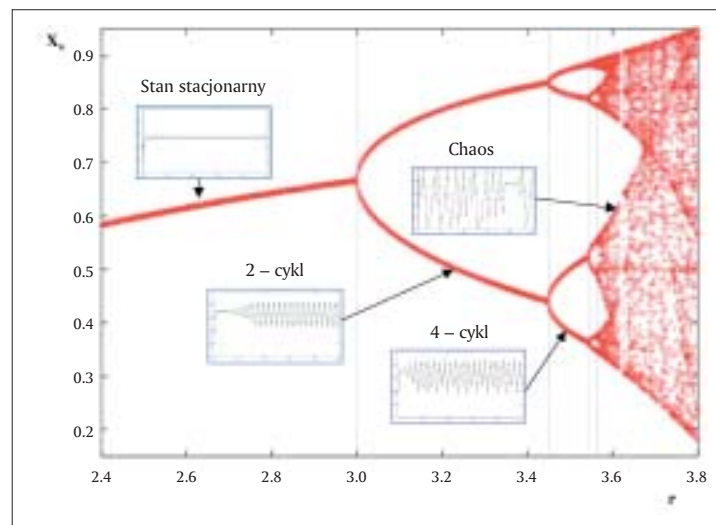
Wielkość populacji, w zależności od wartości parametru r , przedstawia się na wykresie atraktorów, tzw. wykresie bifurkacyjnym, rys. 1. Dla wartości

się nieprzewidywalne, totalnie chaotyczne.

Odwzorowanie logistyczne nie jest jedynym, które daje dzielące się atraktory i „chaos z wzorem”. Jak odkrył Feigenbaum, istnieją całe rodziny równań (wiele z tych równań stosuje się w badaniach doświadczalnych), które włączone w pętle sprzężenia zwrotnego wyglądają, sądząc z rezultatów, dokładnie tak samo jak odwzorowanie logistyczne. Jednym z przykładów takiego równania jest $x = r \sin x$.

Wzór $x_n = rx(1-x)$ jest często nazywany równaniem logistyki. Przy założonej

dynamice rozwoju procesu i znanym wyniku w poprzednim okresie pozwala oszacować spodziewane efekty w następnym terminie. Dla logistyków istotna jest świadomość przemian fazowych w dynamice przepływu obsługiwanego procesu. Poglądowo te przejścia fazowe można przedstawić na przykładzie strumienia wody z kranu – przy niewielkim otwarciu kranu woda wycieka kroplami, przy dalszym otwarciu wypływa ciąglej stabilny strumień, powiększenie



Rys.1. Wykres atraktorów populacji dla różnych wartości parametru wzrostu

otwarcia powoduje rozpad strumienia na dwa: lejowaty zewnętrzny i cylindryczny środkowy; pełne otwarcie wywoła chaotyczny kawitujący wpływ wody.

otwarcia powoduje rozpad strumienia na dwa: lejowaty zewnętrzny i cylindryczny środkowy; pełne otwarcie wywoła chaotyczny kawitujący wpływ wody.

Oscylujący przebieg procesu jest sygnałem niewydolnej obsługi logistycznej lub zbyt wysokiej dynamiki rozwoju. Praktycznie trzykrotny wzrost dynamiki jest bardzo rzadko spotykany, przyczyną tego zjawiska należy więc szukać przede wszystkim w logistyce. Taka nauka płynie z odkrycia prawa przemian fazowych w dynamice przepływów.

zwiększanie parametru będzie powodowało oscylowanie wartości populacji w podwójnym cyklu, jak pokazano to na cząstkowym wykresie wartości. To rozszczepienie nazywa się bifurkacją. Bifurkacje podwajają się, gdy parametr wzrostu przekracza wartość 3,45 i populacja oscyluje w cyklu 4 wartości. Kolejne zwiększanie parametru wywoła bifurkację w cyklu 8 i 16 wartości, aż do wartości parametru 3,57. Po przekroczeniu tej wartości, wielkości populacji staną

otwarcia powoduje rozpad strumienia na dwa: lejowaty zewnętrzny i cylindryczny środkowy; pełne otwarcie wywoła chaotyczny kawitujący wpływ wody.

Oscylujący przebieg procesu jest sygnałem niewydolnej obsługi logistycznej lub zbyt wysokiej dynamiki rozwoju. Praktycznie trzykrotny wzrost dynamiki jest bardzo rzadko spotykany, przyczyną tego zjawiska należy więc szukać przede wszystkim w logistyce. Taka nauka płynie z odkrycia prawa przemian fazowych w dynamice przepływów.

James Gleick – Chaos
Glenn Elert – The Chaos Hypertextbook