

LIANA Mirosław<sup>1</sup>  
PISULA Tomasz<sup>2</sup>

## Problem wyboru tras dostaw z uwzględnieniem różnych środków transportu

### WSTĘP

The Council of Logistics Management sformułowała w 1997 roku następującą definicję logistyki (zob. np.: [1, s. 9]): „Logistyka to ta część procesu w łańcuchu dostawczym, która planuje, wdraża i steruje skutecznym i efektywnym przepływem i przechowywaniem towarów, usług i odpowiednich informacji od miejsca wytworzenia do miejsca wykorzystania, w celu spełnienia wymagań klientów”. W definicji tej zaakcentowano istotne znaczenie planowania dla sprawnego przepływu dóbr w łańcuchu dostaw.

Planowanie, ze względu na okres planowania, można podzielić na: strategiczne, taktyczne, operatywne i bieżące (zob. [10, s. 16]). W wielu obszarach logistyki stosowane są różnorodne metody planowania, przy czym inne metody wykorzystywane są do opracowywania planów strategicznych, a inne do planów operacyjnych czy bieżących.

W ramach planowania operacyjnego jednym z wielu zadań logistyków jest planowanie tras transportowych, wielkości ładunków i wykorzystania środków transportu. Celem planowania przewozów jest możliwie najwyższy poziom wykorzystania potencjału floty transportowej, przy jak najkrótszej drodze i najkrótszym czasie przewozu ładunku, osiągając tym samym obniżenie kosztu jednostkowego w transporcie. W praktyce przedsiębiorstw stosowanych jest wiele metod planowania tras z możliwością ich komputerowego wspomaganie (zob. [10, s. 153-154]).

Przedsiębiorstwa funkcjonują obecnie w środowisku, w którym konkurencja jest niezmiernie wymagająca a systemy logistyczne stają się coraz bardziej złożone. Wymaga to stosowania nowoczesnych narzędzi informatycznych oraz metod ilościowych, które wspomagają podejmowanie optymalnych decyzji logistycznych. Z drugiej strony, poprawa mocy obliczeniowych oraz dostępności komputerów pozwala wykorzystywać w coraz większym stopniu matematyczne modele optymalizacyjne, między innymi w celu planowania procesów transportowych.

### 1 ZASTOSOWANIA BADAŃ OPERACYJNYCH W PLANOWANIU TRAS DOSTAW

Tematyka niniejszej publikacji mieści się w zakresie problematyki marszrutyzacji środków transportu w planowaniu tras dostaw towarów. Zagadnienia te, z racji licznych uwarunkowań koniecznych do rozważenia, mają bardzo wiele różnych wariantów, szerzej opisanych np. w [4]. Najważniejsze z nich to:

- zagadnienie komiwojażera (Travelling Salesman Problem);
- klasyczny problem marszrutyzacji pojazdów na trasach zaopatrzeń (Vehicle Routing Problem – VRP).

Zagadnienie komiwojażera to najprostszy wariant planowania marszrutyzacji dostaw dla pojedynczego środka transportu, bez dodatkowych ograniczeń dotyczących jego ładowności. Polega na wyznaczeniu optymalnej zamkniętej trasy dostaw, łączącej wyróżniony punkt dostaw (baza) z kolejnymi punktami zaopatrzeń (odbiorcami) o znanej lokalizacji.

Klasyczny problem marszrutyzacji pojazdów (VRP) polega na wyznaczeniu optymalnych tras zaopatrzeń do kilku odbiorców, dla których znane jest ich zapotrzebowanie i lokalizacja. Flota

<sup>1</sup> Politechnika Rzeszowska, Wydział Zarządzania, 35-959 Rzeszów, al. Powstańców Warszawy 10

<sup>2</sup> Politechnika Rzeszowska, Wydział Zarządzania, 35-959 Rzeszów, al. Powstańców Warszawy 10

środków transportu posiada jednakową ładowność, a pojazdy wyruszają od jednego dostawcy. Celem jest zoptymalizowanie łącznej długości wszystkich tras dostaw do odbiorców.

Spotykane są liczne odmiany klasycznego zagadnienia marszrutyzacji, np.: Vehicle Routing Problem with Backhauling, Mixed Pickup and Delivery Problem, Periodic Vehicle Routing Problem, Vehicle Routing with Time Windows, Inventory Vehicle Routing.

Vehicle Routing Problem with Backhauling (VRPB) jest odmianą klasycznego problemu marszrutyzacji, w której oprócz jednego centrum dystrybucji rozpatrywane są dwa typy lokalizacji: pierwszy – to odbiorcy dóbr, których zaopatruje centrum, zaś drugi – to dostawcy dóbr (np. producenci), którzy z kolei zaopatrują centrum dystrybucji. Oprócz klasycznych ograniczeń dotyczących np. liczby i pojemności środków transportu wymaga się także, żeby w trakcie kursu załadunek u dostawców był możliwy dopiero po pełnym wyładunku dóbr u odbiorców. Może pojawiać się w tych zagadnieniach problem zarządzania pustymi przebiegami środków transportu. Wyczerpującą analizę tego typu zagadnień można znaleźć na przykład w publikacji [3].

Mixed Pickup and Delivery Problem (MPDP) jest modyfikacją zagadnienia marszrutyzacji dostaw typu VRPB, w której dopuszcza się na poszczególnych trasach możliwość mieszanego (naprzemiennego) załadunku towarów u dostawców i wyładunku u odbiorców. Więcej informacji na temat tego typu zagadnień można znaleźć na przykład w pracy [9].

Periodic Vehicle Routing Problem (PVRP) jest zagadnieniem planowania dostaw towarów do klientów w wielu okresach. W zadaniu okresowej marszrutyzacji dostaw ustala się, którzy klienci w danym dniu zostaną obsłużeni i którymi trasami. Celem jest wyznaczenie dla całego okresu planowania takich marszrut do klientów, których suma długości będzie minimalna. Dokładny opis oraz przegląd literatury dotyczący tego typu zagadnień można znaleźć w pracy [2].

Vehicle Routing with Time Windows (VRPTW – zob. np. praca [7]) jest odmianą klasycznego zagadnienia marszrutyzacji, w której uwzględnia się dodatkowe warunki dotyczące tzw. okien czasowych rozpoczęcia pracy u każdego odbiorcy. Dopuszcza się przypadek, gdy środki transportu mogą przybywać do odbiorców wcześniej niż czas rozpoczęcia ich pracy (muszą wtedy czekać na rozładunek lub załadunek). Istnieje także możliwość naruszenia czasu rozpoczęcia obsługi u odbiorców i wcześniejszego obsłużenia pojazdów, wiąże się to jednak z pewnymi karami.

Inventory Vehicle Routing Problem (IRP) jest wariantem problemu marszrutyzacji, w którym minimalizuje się sumaryczne koszty wykorzystania środków transportu oraz koszty magazynowania zapasów dóbr w magazynach. Istnieje duża różnorodność tego typu problemów, a ich bardziej szczegółowy opis można znaleźć na przykład w pracy [5].

## 2 OPIS PROBLEMU DECYZYJNEGO

Rozpatrywany w pracy problem decyzyjny należy do grupy zagadnień związanych z klasycznym problemem marszrutyzacji pojazdów na trasach zaopatrzeń (Vehicle Routing Problem – VRP). Jest on rozwinięciem analizowanego w pracy [8] problemu, w którym dobra mogły być przewożone tylko jednym typem środka transportu.

Rozważmy jednostopniowy system dystrybucji złożony z jednego dostawcy dóbr, którym może być na przykład magazyn centralny przedsiębiorstwa, oraz z wielu odbiorców dóbr, na przykład pawilonów handlowych. Dostawca pokrywa zgłaszane przez odbiorców zapotrzebowania na dobra poprzez cyklicznie realizowane dostawy.

Transporty dóbr mogą być realizowane przy pomocy wielu typów środków transportu. Przyjęto, że do innych typów środków transportu zalicza się pojazdy, które charakteryzują się różną ładownością lub kosztami eksploatacji. Liczba pojazdów danego typu może być ograniczona, ale całkowita ładowność dostępnej floty pozwala dostarczyć odbiorcom wymagane przez nich ilości dóbr.

Z kolei transportowane dobra są jednorodne. Oznacza to, że mogą być łącznie przewożone i są sformowane w postaci podobnych jednostek ładunkowych np. palet typu EUR. Wiadomo, że ładowność środka transportu określają takie parametry, jak dopuszczalna masa ładunku, objętość i powierzchnia skrzyni ładunkowej. Przy przyjętym założeniu dotyczącym jednorodności

przewożonych dóbr, jeden z tych parametrów będzie stanowił dominujące ograniczenie i będzie jednoznacznie określał ładowność pojazdów.

Znane są lokalizacje dostawcy i odbiorców oraz siatka połączeń drogowych między nimi. Znane są więc odległości i czasy potrzebne na przejazdy pomiędzy poszczególnymi punktami. Pozwala to wyznaczyć zbiór potencjalnych tras dostaw, które będą się charakteryzowały ograniczoną długością lub czasem przejazdu. Każda taka trasa zaczyna się i kończy u dostawcy, na trasie może znajdować się wielu odbiorców. Zakłada się, że w jednym cyklu dostaw po każdej trasie realizowany jest co najwyżej jeden kurs tym samym typem środka transportu.

Przebycie całej trasy dostępnym środkiem transportu będzie generowało pewien koszt, określany dalej kosztem transportu. Koszty transportu mogą się różnić ze względu na długości tras oraz wykorzystane typy pojazdów.

Oprócz kosztów transportu brane są pod uwagę również koszty załadunku i rozładunku dóbr. Ta część tych kosztów, która zależy od wielkości przeładunku, została określona jako koszty zmienne. Natomiast koszty związane z samym faktem wystąpienia przeładunku bez względu na jego skalę nazwano stałymi. Łączna wielkość tych kosztów stałych zależy zatem od liczby przeładunków. W problemie uwzględnia się koszty stałe załadunku i rozładunku, natomiast pomija się koszty zmienne, gdyż nie zależą one od tras dostaw. Ponadto, koszt stały załadunku można rozpatrywać łącznie z kosztem transportu, ponieważ z każdym kursem będzie związany dokładnie jeden załadunek u dostawcy. Przyjmuje się, że koszty stałe rozładunku mogą być różne u każdego odbiorcy.

Problem decyzyjny sprowadza się do takiego wyboru tras (ze zbioru potencjalnych tras), żeby można było nimi dostarczyć zamówione przez odbiorców ilości dóbr przy minimalnych łącznych kosztach transportu, załadunku i rozładunku.

### 3 MODEL MATEMATYCZNY PROBLEMU DECYZYJNEGO

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$I$  – liczba tras;

$i$  – numer trasy,  $i = 1, 2, \dots, I$ ;

$J$  – liczba odbiorców;

$j$  – numer odbiorcy,  $j = 1, 2, \dots, J$ ;

$K$  – liczba typów pojazdów;

$k$  – numer typu pojazdu,  $k = 1, 2, \dots, K$ .

Parametrami w modelu matematycznym są:

$d_j$  – zapotrzebowanie odbiorcy  $O_j$  ( $d_j \geq 0$ );

$S_k$  – ładowność pojazdu (środka transportu) typu  $k$  ( $S_k > 0$ );

$n_k$  – liczba pojazdów typu  $k$  ( $n_k = 1, 2, \dots$ );

$C_{ik}$  – koszt przejazdu pojazdu typu  $k$  po trasie  $T_i$  powiększony o koszt stały załadunku ( $C_{ik} > 0$ );

$c_j$  – stały koszt rozładunku u odbiorcy  $O_j$  ( $c_j > 0$ );

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy odbiorca } O_j \text{ położony jest na trasie } T_i, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases}$

Zmiennymi decyzyjnymi w modelu są:

$x_{ijk}$  – wielkość ładunku przewożonego po trasie  $T_i$  do odbiorcy  $O_j$  pojazdem typu  $k$ ;

$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{gdy realizowany jest kurs po trasie } T_i \text{ pojazdem typu } k, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$

$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy w trakcie kursu pojazdem typu } k \text{ po trasie } T_i \text{ realizowany jest rozładunek u odb. } O_j, \\ 0, & \text{w przypadku przeciwnym,} \end{cases}$

Przyjęte oznaczenia pozwoliły zapisać model matematyczny sformułowanego problemu decyzyjnego następująco:

$$(\min) FC(y_{ik}, z_{ijk}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I C_{ik} * y_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J c_j * z_{ijk} \quad (1)$$

przy warunkach ograniczających:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^I x_{ijk} = d_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, J; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^J x_{ijk} \leq S_k * y_{ik} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; k = 1, 2, \dots, K; \quad (3)$$

$$x_{ijk} \leq S_k * z_{ijk} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K; \quad (4)$$

$$z_{ijk} \leq a_{ij} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^I y_{ik} \leq n_k \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K; \quad (6)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K; \quad (7)$$

$$y_{ik} - \text{binarne} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; k = 1, 2, \dots, K; \quad (8)$$

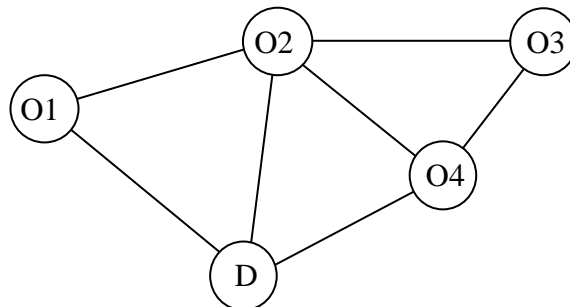
$$z_{ijk} - \text{binarne} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K. \quad (9)$$

W modelu tym funkcja celu (1) obejmuje łączne koszty transportu oraz koszty stałe załadunku u dostawcy i rozładunków u odbiorców. Warunki (2) można nazwać warunkami bilansowymi odbiorców. Oznaczają one, że wielkość ładunków przewiezionych do każdego odbiorcy będzie równa zgłoszonemu przez nich zapotrzebowaniu. Dzięki warunkom (3) spełnione są jednocześnie dwa postulaty. Po pierwsze, przewóz ładunku będzie możliwy tylko w wyniku realizacji kursu (wzajemne powiązanie zmiennych  $x_{ijk}$  i  $y_{ik}$ ). A po drugie, wielkość ładunku nie będzie mogła przekroczyć ładowności użytego do przewozu środka transportu. Z kolei warunki (4) łączą zmienne  $x_{ijk}$  i  $z_{ijk}$  i zapewniają, że przewiezienie ładunku będzie powodowało wystąpienie rozładunku u odbiorcy. Ograniczenia (5) sprawiają, że rozładunek będzie mógł wystąpić tylko u tych odbiorców, którzy są zlokalizowani na danej trasie. W postaci warunków (6) uwzględniono w modelu ograniczoną liczbę pojazdów różnych typów.

## 4 PRZYKŁAD

### 4.1 Przykładowa sieć dystrybucji

Niech w sieci dystrybucji dostawca D obsługuje 4 odbiorców:  $O_1, O_2, O_3, O_4$ . Sieć wzajemnych połączeń przedstawiono na rysunku 1, przy czym odcinki oznaczają drogi, którymi będzie można rozwozić towar.



Rys. 1. Przykładowa sieć dystrybucji

### 4.2 Potencjalne trasy dostaw

Teoretycznie, w przypadku  $J$  odbiorców jest  $2^J - 1$  możliwych tras dostaw. Wynika to stąd, że każdej trasie odpowiada niepusty podzbiór zbioru odbiorców, na przykład trasie  $D-O_1-O_2-D$  odpowiada podzbiór  $\{O_1, O_2\}$ . W przykładzie daje to 15 tras.

Jednak zbiór ten można zmniejszyć, gdyż nie wszystkie trasy można przejechać w czasie przeznaczonym na dostawę. Niech w przykładzie taką zbyt długą, zatem odrzuconą, trasą będzie  $D-O_1-O_2-O_3-O_4-D$ . Również specyficzna konfiguracja sieci połączeń pozwala zmniejszyć zbiór tras, gdyż niektóre trasy się pokrywają. Na przykład, żeby dotrzeć od dostawcy  $D$  do odbiorcy  $O_3$ , trzeba przejechać „w pobliżu” odbiorcy  $O_4$ , zatem trasa  $D-O_3-D$  pokrywa się z trasą  $D-O_3-O_4-D$ . Trasę  $D-O_3-D$  nazwiemy zdominowaną i ją wykluczymy.

Ostateczny zbiór potencjalnych tras dostaw w przykładzie przedstawiono w tabeli 1. Informację, którzy odbiorcy  $O_j$  leżą przy trasie  $T_i$  zapisano w postaci macierzy połączeń  $[a_{ij}]$ . W tabeli 1 umieszczono także koszty transportu i załadunku, które zostaną poniesione w wyniku realizacji kursu różnymi pojazdami po danych trasach. Koszty te są zróżnicowane zarówno ze względu na długości potencjalnych tras, jak i odmienne typy środków transportu.

Tab. 1. Potencjalne trasy oraz ich parametry w przykładowej sieci dostaw

Koszty [j.p.]		Trasa	$T_i$	Macierz połączeń $a_{ij}$			
$C_{i1}$	$C_{i2}$			$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$
824	718	D- $O_1$ -D	$T_1$	1	0	0	0
808	706	D- $O_2$ -D	$T_2$	0	1	0	0
800	700	D- $O_4$ -D	$T_3$	0	0	0	1
916	787	D- $O_1$ - $O_2$ -D	$T_4$	1	1	0	0
884	763	D- $O_2$ - $O_4$ -D	$T_5$	0	1	0	1
912	784	D- $O_3$ - $O_4$ -D	$T_6$	0	0	1	1
992	844	D- $O_1$ - $O_2$ - $O_4$ -D	$T_7$	1	1	0	1
944	808	D- $O_2$ - $O_3$ - $O_4$ -D	$T_8$	0	1	1	1

### 4.3 Pozostałe parametry w przykładzie

W przykładzie przyjęto, że stały koszt rozładunku  $c_j$  będzie u wszystkich odbiorców równy 10 jednostek pieniężnych (j.p.). Zapotrzebowanie  $d_j$  zgłoszone przez odbiorców wynosi odpowiednio: 39, 36, 37 i 35 palet, co łącznie daje 147 palet.

Z kolei dostawy mogą być realizowane dwoma typami pojazdów, o ładowności odpowiednio 33 palety (oznaczone indeksem  $k=1$ ) i 20 palet ( $k=2$ ).

Wyznaczono dwa warianty planu dostaw. W wariacie A przyjęto, że liczba dostępnych pojazdów każdego typu nie jest limitowana, czyli w modelu nie będą występowały warunki (6). Natomiast w wariacie B uwzględniono, że do dyspozycji są tylko 3 pojazdy o ładowności 33 palety i 5 pojazdów o ładowności 20 palet.

### 4.4 Optymalny plan dostaw w wariacie A

Porównując zgłoszone zapotrzebowania i dysponowane ładowności środków transportu, nietrudno dostrzec, że do każdego odbiorcy muszą dotrzeć co najmniej dwie dostawy. Ale z drugiej strony, 147 palet zmieści się w skrzyniach ładunkowych tylko 5 pojazdów, które są do dyspozycji.

Do wybrania najlepszych tras dostaw w oparciu o podany wcześniej model matematyczny wykorzystano dodatek Solver do programu Microsoft Office Excel. Wartości zmiennych decyzyjnych  $x_{ijk}$  dla uzyskanego rozwiązania optymalnego podano w tabeli 2.

Tab. 2. Wartości zmiennych  $x_{ijk}$  w rozwiązaniu optymalnym w wariacie A

$T_i$	k = 1				k = 2			
	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$
$T_1$	33	0	0	0	0	0	0	0
$T_2$	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_3$	0	0	0	33	0	0	0	0
$T_4$	6	27	0	0	0	0	0	0
$T_5$	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_6$	0	0	33	0	0	0	0	0
$T_7$	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_8$	0	0	0	0	0	9	4	2

Łatwo z niej odczytać, że:

- pojazdem typu 1 (o ładowności 33 palety) należy wykonać kurs po trasie  $T_1$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_1$ ,
- pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_3$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_4$ ,
- pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_4$  i dostarczyć 6 palet do odbiorcy  $O_1$  oraz 27 palet do odbiorcy  $O_2$ ,
- pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_6$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_3$ ,
- pojazdem typu 2 (o ładowności 20 palet) należy wykonać kurs po trasie  $T_8$  i dostarczyć 9 palet do odbiorcy  $O_2$ , 4 palety do odbiorcy  $O_3$  oraz 2 palety do odbiorcy  $O_4$ .

Łącznie zostaną wykorzystane cztery pojazdy o większej ładowności i jeden pojazd o mniejszej ładowności. U każdego odbiorcy wystąpią dwa rozładunki. Suma rozważanych kosztów transportu, załadunku i rozładunku wyniesie 4340 j.p.

Wartości zmiennych  $x_{ijk}$  wyraźnie także wskazują, które zmienne binarne w modelu przyjęły wartość 1. Są to:

- wskazujące trasy i typy pojazdów:  $y_{11}$ ,  $y_{31}$ ,  $y_{41}$ ,  $y_{61}$  i  $y_{82}$ , oraz
- wskazujące rozładunki:  $z_{111}$ ,  $z_{341}$ ,  $z_{411}$ ,  $z_{421}$ ,  $z_{631}$ ,  $z_{822}$ ,  $z_{832}$  i  $z_{842}$ .

#### 4.5 Optymalny plan dostaw w wariancie B

Ze względu na to, że w wariancie B do dyspozycji są tylko 3 pojazdy o większej ładowności, optymalny plan dostaw wyznaczony w wariancie A nie jest możliwy do realizacji. Można też zauważyć, że teraz do rozwiezienia 147 palet trzeba będzie wykorzystać przynajmniej 6 pojazdów. Nowe optymalne rozwiązanie przedstawiono w tabeli 3.

Tab. 3. Wartości zmiennych  $x_{ijk}$  w rozwiązaniu optymalnym w wariancie B

$T_i$	k = 1				k = 2			
	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$
$T_1$	33	0	0	0	0	0	0	0
$T_2$	0	33	0	0	0	0	0	0
$T_3$	0	0	0	33	0	0	0	0
$T_4$	0	0	0	0	6	3	0	0
$T_5$	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_6$	0	0	0	0	0	0	20	0
$T_7$	0	0	0	0	0	0	0	0
$T_8$	0	0	0	0	0	0	17	2

Podobnie jak w wariancie A, odczytamy z tabeli 3, że:

- pierwszym pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_1$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_1$ ,
- drugim pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_2$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_2$ ,
- trzecim pojazdem typu 1 należy wykonać kurs po trasie  $T_3$  i dostarczyć 33 palety do odbiorcy  $O_4$ ,
- pierwszym pojazdem typu 2 należy wykonać kurs po trasie  $T_4$  i dostarczyć 6 palet do odbiorcy  $O_1$  oraz 3 palety do odbiorcy  $O_2$ ,
- drugim pojazdem typu 2 należy wykonać kurs po trasie  $T_6$  i dostarczyć 20 palety do odbiorcy  $O_3$ ,
- trzecim pojazdem typu 2 należy wykonać kurs po trasie  $T_8$  i dostarczyć 17 palet do odbiorcy  $O_3$  oraz 2 palety do odbiorcy  $O_4$ .

Po analizie tego rozwiązania dostrzeżono, że trzeci pojazd typu 2 nie musi przejeżdżać trasą  $T_8$ , ale powinien wybrać krótszą i tańszą trasę  $T_6$ . Wynika to z tego, że nie jest tym pojazdem przewożony żaden ładunek dla odbiorcy  $O_2$ . W skutek tej poprawki wykonane zostaną dwa kursy pojazdami o mniejszej ładowności trasą  $T_6$ . Suma uwzględnianych w problemie kosztów dla takiego rozwiązania wyniesie 4867 j.p.

#### PODSUMOWANIE

Przedstawiono w pracy pewien problem decyzyjny dotyczący wyboru tras dostaw oraz model matematyczny, który pozwala znajdować rozwiązania optymalne tego problemu. Model należy do klasy zadań programowania mieszanego liniowego (PML), gdyż występują w nim zmienne ciągłe i zmienne binarne, natomiast wszystkie relacje pomiędzy nimi są liniowe (zobacz np. [6, s. 92-111]).

Uniwersalną metodą rozwiązywania takich zadań jest metoda podziału i ograniczeń i pomocniczo algorytm simpleks. Uzyskanie optymalnego rozwiązania tą drogą, przy dużej liczbie odbiorców, potencjalnych tras dostaw i typów środków transportu, może być uciążliwe. Jeżeli będzie I tras, J odbiorców oraz K typów pojazdów, to w modelu będzie  $I \cdot J \cdot K$  zmiennych ciągłych,  $I \cdot (J+1) \cdot K$  zmiennych binarnych oraz  $[(I \cdot K) \cdot (2 \cdot J + 1) + J + K]$  warunków ograniczających (2)-(6).

Jeżeli zbiór odbiorców można podzielić na rozłączne części z innymi potencjalnymi trasami dostaw, to całe zadanie będzie można rozłożyć na kilka mniejszych niezależnych zadań, które łatwiej rozwiązać. Należy jednak pamiętać, że limity dotyczące środków transportu dotyczą wszystkich takich zadań cząstkowych łącznie.

Zaprezentowany model znajduje zastosowanie głównie tam, gdzie nie można jednym kursem obsłużyć wszystkich odbiorców dóbr, z powodu zbyt małej ładowności środka transportu lub ograniczonego czasu przejazdu.

Wydaje się, że dużym ograniczeniem w modelu jest możliwość realizacji tylko jednego kursu pojazdem określonego typu po każdej trasie. W praktyce, żeby tego ograniczenia nie było, wystarczy różnymi indeksami k oznaczyć w modelu ten sam typ pojazdu.

Rozważany w pracy problem dotyczył zaplanowania łącznych dostaw od jednego dostawcy do wielu odbiorców. Z analogicznym zagadnieniem możemy mieć do czynienia, gdy trzeba przewieźć dobra (lub ludzi) z wielu punktów w jedno miejsce. Zaprezentowany model optymalizacyjny nadal będzie użyteczny.

Przedstawiony problem decyzyjny zawierał wiele założeń. Tworzenie modeli dla problemów ogólniejszych, w których pomija się niektóre z tych założeń, stanowi przedmiot dalszych badań.

### **Streszczenie**

*Tematyka artykułu dotyczy zastosowania badań operacyjnych do optymalizacji przewozów w jednostopniowej sieci dystrybucji. W fazie dystrybucji realizowane są dostawy dóbr np. z magazynu centralnego do magazynów regionalnych lub z magazynów regionalnych do punktów sprzedaży hurtowej lub detalicznej. W pracy zakłada się, że takie dostawy odbywają się cyklicznie i pokrywają zgłaszane zapotrzebowania. Dobra mogą być przewożone z użyciem środków transportu o różnej ładowności. Dla danej sieci dystrybucji można wyznaczyć zbiór potencjalnych tras dostaw. Problem decyzyjny sprowadza się do takiego wyboru tras z tego zbioru, żeby zminimalizować łączne koszty transportu, załadunku i rozładunku. Do znalezienia optymalnego rozwiązania problemu zaproponowano programowanie matematyczne. W pracy przedstawiono liniowy model matematyczny zagadnienia. Model zawiera zarówno zmienne rzeczywiste, jak i zmienne binarne.*

## The problem of optimal choice of supply routes with different means of transport

### **Abstract**

*The subject of the article concerns the application of operations research to optimize transport operations in single-stage distribution network. In the phase of distribution supplies of goods are being carried out, for example from the central warehouse to the regional magazines, or from regional magazines to points of the wholesale or retail. In the work assumes that such delivery shall take place periodically and cover the reported demand. Goods can be transported using means of transport with different capacities. For a given distribution network it is possible to assign the set of potential of supply routes. The decision-making problem consists in such choice of routes from this set in order to minimize total transport costs, costs of the loading and the unloading. For finding an optimal solution of the problem a mathematical programming was suggested. At the work linear mathematical model of the issue was described. The Model includes both the real variables and the binary variables.*

### **BIBLIOGRAFIA**

1. Bendkowski J., Kramarz M., Kramarz W., Metody i techniki ilościowe w logistyce stosowanej. Wybrane zagadnienia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
2. Campbell A. M., Wilson J. H., Forty Years of Periodic Vehicle Routing. Networks 2014, Vol. 63(1).
3. Cuervo D. P., Goos P., Sörensen K., Arráiz E., An Iterated Local Search Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Backhauls. European Journal of Operational Research 2014, Vol. 237.
4. Goetschalckx M., Supply Chain Engineering. International Series in Operations Research & Management Science 2011, Vol. 161, Springer New York.
5. Guerrero W. J., Prodhon C., Velasco N., Amaya C. A., Hybrid Heuristic for the Inventory Location-Routing Problem with Deterministic Demand. International Journal of Production Economics 2013, Vol. 146.
6. Ignasiak E., Borucki W., Marcinkowski J., Sikora W., Badania operacyjne. PWE, Warszawa 1996.

7. Letchford A. N., Nasiri S. D., Oukil A., Pricing Routines for Vehicle Routing with Time Windows on Road Networks. *Computers & Operations Research* 2014, Vol. 51.
8. Liana M., Pisula T., Zastosowanie programowania matematycznego do wyboru tras dostaw w sieci dystrybucji. *Quantitative Methods in Economics* 2014 (w recenzji).
9. Rais A., Alvelos F., Carvalho M. S., New Mixed Integer-Programming Model for the Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment. *European Journal of Operational Research* 2014, Vol. 235.
10. Śliwczyński B., Planowanie logistyczne. Instytut Logistyki i Magazynowania, Poznań 2007.