

Stanisław Krzyżaniak  
Instytut Logistyki i Magazynowania

## Wyznaczanie poziomu informacyjnego dla odnawiania zapasu w warunkach nieciągłego przeglądu jego stanu

Obserwowane w praktyce wartości poziomu obsługi przy odnawianiu zapasu w oparciu o tak zwany poziom informacyjny, są często istotnie niższe od wartości oczekiwanych, wynikających z zastosowania klasycznego wzoru na obliczanie poziomu informacyjnego zapasu. W artykule omówiono możliwe przyczyny tego zjawiska i zaproponowano korektę wzoru na obliczanie poziomu informacyjnego, uwzględniając konsekwencje nieciągłego przeglądu stanu zapasów w tym systemie. Model analityczny został zweryfikowany badaniami symulacyjnymi.

### Przesłanki modyfikacji klasycznej formuły na obliczanie poziomu informacyjnego zapasu w przypadku nieciągłego przeglądu stanu zapasu

Odnawianie zapasu oparte na poziomie informacyjnym (punktie ponownego zamówienia, ang. *Reorder Point*) jest – obok przeglądu okresowego – jednym z dwóch podstawowych sposobów zamawiania. Jego realizacja zasadza się na prostej regule: złożenie zamówienia w stałej, uzgodnionej wcześniej z dostawcą wielkości, w chwili gdy poziom zapasu wolnego (dysponowanego) osiągnie obliczony poziom informacyjny ZI [2,3]:

$$ZI = P \cdot T + ZB = P \cdot T + \omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \sigma_T^2} \quad (1)$$

gdzie:

P – średni popyt w przyjętej jednostce czasu (na przykład dzień, tydzień),

T – czas cyklu uzupełnienia zapasu,

ZB – zapas zabezpieczający (uwzględnia możliwe losowe zmiany popytu oraz czasu cyklu uzupełnienia) zależny od popytu P, czasu cyklu uzupełnienia T oraz:

- Poziomu obsługi – współczynnik bezpieczeństwa
- Odchylenia standardowego popytu  $\sigma_p$
- Odchylenia standardowego czasu T –  $\sigma_T$ .

Zarówno formuła (1), jak i sama zasada realizacji takiego odnawiania zapasu są bardzo proste i są szeroko stosowane w praktyce. Jednak właśnie tam obserwuje się często odstępstwa rzeczywistych wyników (zwłaszcza rzeczywistego poziomu obsługi) od przyjętych założeń. Z pewnością, jedną z częstszych i ważniejszych przyczyn są znaczące różnice pomiędzy rzeczywistym rozkładem popytu, a rozkładem zakładanym w obliczeniach wielkości zapasu zabezpieczającego. W tym artykule zwrócona zostanie uwaga na inne możliwe przyczyny tego niekorzystnego zjawiska.

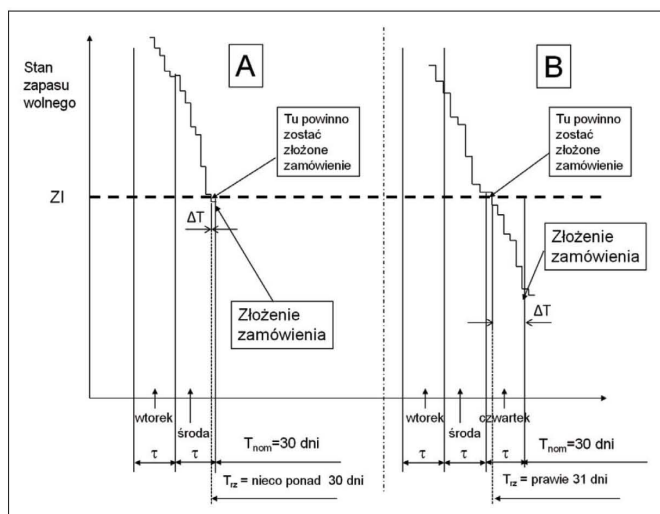
W pierwszym rzędzie należy zwrócić uwagę na właściwe definiowanie czasu cyklu uzupełnienia. Na pewno nie można tu brać pod uwagę czasu cyklu realizacji zamówienia przez dostawcę. Pomija się w ten sposób składowe cyklu uzupełnienia leżące po stronie zamawiającego (procesy decyzyjne, przygotowanie zamówienia, a później przyjęcie dostawy i udostępnienie do wykorzystania). W wielu przypadkach uzgodniony czas realizacji należy powiększyć o czas transportu, jeśli jest on w gestii zamawiającego. Ale i takie, pełne rozumienie pojęcia cyklu realizacji zamówienia może nie wystarczyć do zapewnienia zgodności oczekiwanego poziomu obsługi z poziomem rzeczywistym. Przyczynami tego mogą być dwie kwestie:

- jednorazowe wydania mogą być na tyle duże, że po przekroczeniu poziomu ZI (co jest sygnałem do złożenia zamówienia) poziom zapasu dysponowanego jest już znacząco niższy od poziomu ZI
  - złożenie zamówienia następuje z pewnym opóźnieniem w stosunku do chwili osiągnięcia poziomu informacyjnego.
- Rozważania prowadzone w niniejszym artykule dotyczą drugiej z tych kwestii. Oczywiście, jedną z przyczyn opóźnień mogą być ludzkie błędy, przeoczenia i inne tego typu nieplanowane zdarzenia, które skutkują wydłużeniem cyklu uzupełnienia. Często jednak wydłużenia rzeczywistego czasu cyklu uzupełnienia wynikają z ograniczeń organizacyjnych dotyczących czasu przeglądu zapasu, momentu złożenia zamówienia lub terminu dostawy.

System oparty na poziomie informacyjnym nazywany bywa czasami systemem przeglądu ciągłego, dla podkreślenia nieprzerwanej możliwości porównywania stanu zapasu dysponowanego z poziomem informacyjnym zapasu. W rzeczywistości taka ciągłość bywa ograniczona, także ze względów praktycznych. Stąd przedmiotem dalszych rozważań w niniejszym artykule są konsekwencje nieciągłości przeglądu. Można by też mówić tu o „przeглядzie dyskretnym”. Oto przykład: cykl uzupełnienia zapasu trwa 30 dni. Poziom informacyjny zapasu, gwarantujący poziom obsługi (prawdopodobieństwo obsłużenia popytu w cyklu uzupełnienia) równy 95% obliczono jako 350 sztuk. Ze względów organizacyjnych ewentualne zamówienia mogą być składane na koniec danego dnia. W środę wieczorem zapas dysponowany wynosił 376 sztuk. Nie były więc spełnione warunki złożenia zamówienia. W czwartek na koniec dnia w zapasie wolnym były już tylko 322 sztuki. Oczywiście zamówienie zostanie złożone ( $322 < 350$ ), a dostawa przyjdzie po 30 dniach. Widać jednak, że w rzeczywistości przekroczenie poziomu informacyjnego nastąpiło w ciągu dnia (może o 13:00, może o 14:20?).

Rysunek 1 ilustruje to zjawisko. Jeśli poziom ZI zostałby osiągnięty tuż przed końcem dnia roboczego w środę (rysunek 1A), to zamówienie zostałoby złożone jeszcze w środę, a czas cy-

klu uzupełnienia byłby tylko nieznacznie dłuższy od przyjmowanych w obliczeniach 30 dni. Jednak, gdyby poziom informacyjny został osiągnięty w czwartek, tuż po rozpoczęciu dnia (rysunek 1B), to zamówienie – zgodnie z przyjętymi ograniczeniami – zostanie złożone dopiero na koniec dnia, a rzeczywisty czas cyklu uzupełnienia byłby równy niemal 31 dni. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że tak nieznaczne wydłużenie cyklu uzupełnienia nie powinno mieć istotnego wpływu na poziom obsługi, jednak przeprowadzone badania symulacyjne oraz wyniki obliczeń wskazują, że w rzeczywistości poziom obsługi będzie wynosił tylko 86% (dla współczynnika zmienności dziennego popytu na poziomie około 0,14). Różnice te są jeszcze bardziej wyraźne dla krótszych czasów cyklu uzupełnienia. Właściwym wskaźnikiem jest tu iloraz czasu cyklu uzupełnienia  $T$  oraz cyklu możliwych zamówień  $\tau$ .



Rys. 1. Ilustracja możliwych opóźnień w złożeniu zamówienia w wyniku nieciągłego przeglądu stanu zapasów. Źródło: opracowanie własne.

Powyższe rozważania pozwalają na postawienie tezy, że przy obliczaniu poziomu informacyjnego zapasu należy dodatkowo uwzględnić opóźnienie  $\Delta T$ : zarówno jego wartość średnią (oczekiwaną)  $E(\Delta T)$  jak i odchylenie standardowe  $\sigma_{\Delta T}$ . Tak skorygowany poziom zapasu informacyjnego  $ZI_{kor}$  proponuje się obliczać z następującej ogólnej formuły:

$$ZI_{kor} = P \cdot [T + E(\Delta T)] + \omega \cdot \sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + P^2 \cdot \sigma_T^2 + P^2 \cdot \sigma_{\Delta T}^2} \quad (2)$$

Dla określenia obu parametrów rozkładu opóźnienia  $T$  przeprowadzono badania symulacyjne.

## Zakres badań symulacyjnych służących określenia obu parametrów rozkładu opóźnienia $\Delta T$

Do badań symulacyjnych wykorzystano autorskie narzędzie, wykonane jako aplikacja arkusza kalkulacyjnego EXCEL, pozwalające na symulowanie najważniejszych systemów odnawiania zapasów dla wybranych rozkładów częstości występowania popytu.

Głównym źródłem danych do symulacji odnawiania zapasu jest generowanie losowych zmian popytu dla przyjętej jednostki czasu (przyjęto umownie 1 dzień). Przyjęto założenie o rozkładzie normalnym popytu. Znajduje on zastosowanie w przy-

padku dóbr szybko rotujących i jest powszechnie stosowany w różnego typu aplikacjach i systemach informatycznych wspomagających zarządzanie zapasami. Przyjęto rozkłady o następujących parametrach:

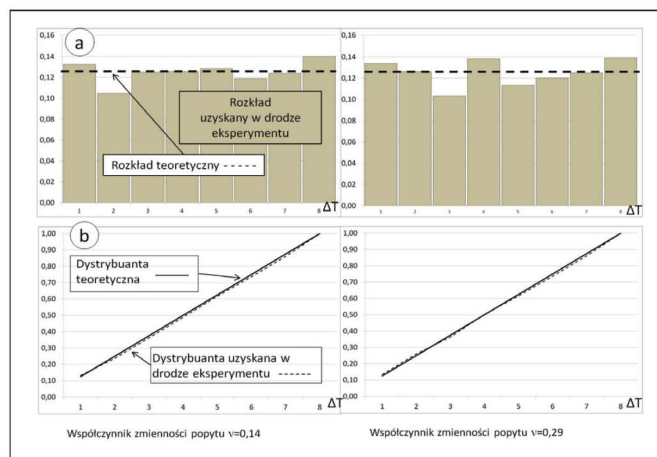
Rozkład (1): średnia  $P = 50,2$ , odchylenie standardowe  $\sigma_P = 7,25$ .

Rozkład (2): średnia  $P = 50,5$ , odchylenie standardowe  $\sigma_P = 14,7$ .

Dla zbadania zgodności rozkładu generowanego popytu z rozkładem normalnym o założonych parametrach zastosowano test Kołmogorowa-Smirnowa [1]. Testem tym sprawdza się zazwyczaj hipotezę zerową o tym, że rozkład zmiennej (dane doświadczalne) jest zbliżony do normalnego. W tym przypadku weryfikacji testem Kołmogorowa-Smirnowa poddano dane pochodzące z generatora. Dla wybranej próby obejmującej 78 dni uzyskano w obu przypadkach zgodność z rozkładem normalnym na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ .

W następnym kroku rozłożono tak symulowany popyt dzienny na popyt odpowiadający 1/8 dnia. Choć to raczej rzadkie w dzisiejszych realiach biznesu, można przyjąć, że mamy do czynienia z 8 godzinnym dniem działania jednostki zarządzającej rozpatrywanym zapasem. Przyjęto, że okres, w którym mogą być dokonywane przeglądy zapasu, ma długotrwałość  $\tau = 1$  dzień.

W trakcie badań symulacyjnych analizowano (dla obu rozkładów popytu dziennego i przy różnych wartościach czasu cyklu uzupełnienia) otrzymywane wartości opóźnienia  $\Delta T$ . Obserwowano częstości występowania opóźnień równych: (0; 1), (1; 2); (1; 2), (2; 3); (3; 4), (4; 5); (5; 6), (6; 7); (7; 8), godz. Otrzymane wyniki pokazują, że spośród znanych rozkładów teoretycznych najbliższy rozkładom obserwowanym jest rozkład jednostajny (inaczej *jednorodny, równomierny, prostokątny*). Ilustruje to rysunek. Jest to też zgodne z wynikiem rozumowania wskazującego, że nie ma podstaw, aby odrzucić hipotezę, że każde z opóźnień z przedziału (0;  $\tau$ ) jest równo prawdopodobne. Innymi słowy, osiągnięcie poziomu  $ZI$  jest możliwe w każdym momencie z jednakowym prawdopodobieństwem. Potwierdzenie tej hipotezy uzyskano też korzystając ponownie z testu Kołmogorowa-Smirnowa. Dla obu badanych rozkładów popytu dziennego uzyskano zgodność z rozkładem jednostajnym na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ . Rysunek 2 przedstawia badane rozkłady i odpowiadające im dystrybuanty – teoretyczne i otrzymane w drodze eksperymentu.



Rys. 2. Porównanie teoretycznych i otrzymanych w drodze eksperymentu przebiegów rozkładu częstości występowania (a) i dystrybuanty (b) opóźnienia zamówienia  $\Delta T$ . Źródło: opracowanie własne.

## Określenie korygowanego poziomu informacyjnego uwzględniającego zidentyfikowany rozkład czasu opóźnienia w złożeniu zamówienia

W ogólnym przypadku podstawowe parametry rozkładu jednostajnego w przedziale (a; b) są równe [1]:

$$\text{Średnia} = \frac{a+b}{2} \quad (3)$$

$$\text{Odchylenie standardowe} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \quad (4)$$

Przyjmując jako szerokość badanego przedziału okres możliwego przeglądu  $\tau = 8$  godzin ( $a=0$ ;  $b=8$ ) dla badanego przypadku otrzymamy:

$$E(\Delta T) = \frac{0+8}{2} = 4 \text{ godz.}$$

$$\sigma_{\Delta T} = \frac{8-0}{\sqrt{12}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 2,31 \text{ godz.}$$

Te wielkości są także zgodne z wynikami uzyskanymi w trakcie symulacji:

$$E(\Delta T) = 4,07 \text{ godz.}; \sigma_{\Delta T} = 2,32 \text{ godz. dla rozkładu (1) - } P = 50,2; \sigma_p = 7,25$$

$$E(\Delta T) = 4,03 \text{ godz.}; \sigma_{\Delta T} = 2,34 \text{ godz. dla rozkładu (2) - } P = 50,5; \sigma_p = 14,7$$

Przechodząc do jednostek wyrażonych w dniach ( $\tau=1$ ) otrzymamy:

$$E(\Delta T) = \frac{0+\tau}{2} = 0,5 \cdot \tau \quad (5)$$

$$\sigma_{\Delta T} = \frac{\tau-0}{\sqrt{12}} = \frac{\tau \cdot \sqrt{3}}{6} \quad (6)$$

Podstawiając formuły (6) i (7) do wzoru (3) dostajemy wzór na korygowany poziom informacyjny zapasu:

$$ZI_{kor} = P \cdot (T + 0,5 \cdot \tau) + \omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \left( \sigma_T^2 + \frac{\tau^2}{12} \right)} \quad (7)$$

Dla przyjętego w dalszym eksperymencie symulacyjnym założenia o stałości czasu T ( $\sigma_T \approx 0$ ) otrzymujemy:

$$ZI_{kor} = P \cdot (T + 0,5 \cdot \tau) + \omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \frac{\tau^2}{12}} \quad (8)$$

Wzór (8) pozwala obliczyć poziom informacyjny zapasu gwarantujący osiągnięcie założonego poziomu obsługi, wyrażonego we wzorze współczynnikiem bezpieczeństwa  $\omega$ .

Można tu przypomnieć, że dla rozkładu normalnego zależność pomiędzy poziomem obsługi rozumianym jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu w cyklu uzupełnienia zapasu (POP), a współczynnikiem bezpieczeństwa  $\omega$  zachodzi zależność:

$$POP = \int_{-\infty}^{\omega} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(\omega) \quad (9)$$

Wzór (8) można wykorzystać również dla obliczenia rzeczywistego poziomu obsługi POP, przy zastosowaniu poziomu informacyjnego wyznaczonego wzorem (1), a więc zaniedbującym możliwe opóźnienia w złożeniu zamówienia  $\Delta T$ :

$$\omega_{rz} = \frac{P \cdot T + \omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \sigma_T^2} - P \cdot (T + 0,5 \cdot \tau)}{\sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \left( \sigma_T^2 + \frac{\tau^2}{12} \right)}} \quad (10a)$$

$$\omega_{rz} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \sigma_T^2} - 0,5 \cdot P \cdot \tau}{\sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \left( \sigma_T^2 + \frac{\tau^2}{12} \right)}} \quad (10b)$$

Dla przyjętych założeń ( $\sigma_T \approx 0$ ) formuła (10b) przyjmuje postać:

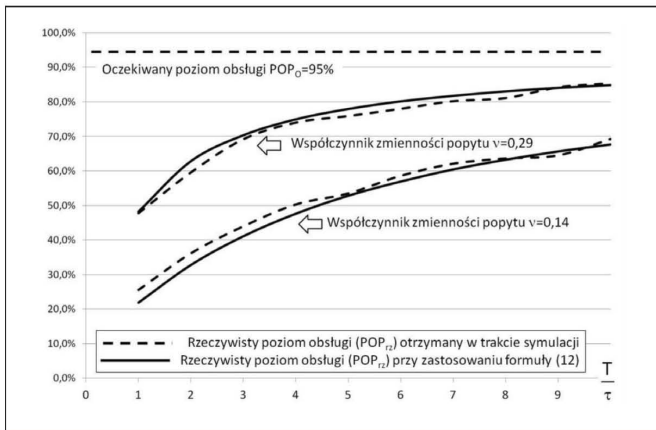
$$POP_{rz} = \Phi(\omega_{rz}) \quad (11)$$

Określenie wpływu badanych czynników (iloraz  $\frac{T}{\tau}$  współczynnik zmienności popytu  $v_p$  oraz oczekiwany poziom obsługi POP) na rzeczywisty poziom obsługi POP<sub>rz</sub> przeprowadzono dwójako: w sposób analityczny, a następnie symulacyjnie, dla weryfikacji modelu analitycznego. Badania te stanowiły jednocześnie weryfikację poprawności formuł (8) i (12).

$$POP_{rz} = \Phi(\omega_{rz}) = \Phi \left( \frac{\omega \cdot \sqrt{\sigma_p^2 \cdot T} - 0,5 \cdot P \cdot \tau}{\sqrt{\sigma_p^2 \cdot T + P^2 \cdot \frac{\tau^2}{12}}} \right) \quad (12)$$

Rysunek 3 przedstawia zmiany rzeczywistego poziomu obsługi w zależności od wartości ilorazu  $\frac{T}{\tau}$ , przy zastosowaniu poziomu ZI obliczonego dla oczekiwanego poziomu obsługi POP=95%, przy dwóch różnych wielkościach współczynnika zmienności popytu. Otrzymane wyniki wskazują na zgodność obliczeń opartych na wzorze (12), a wynikami rzeczywistymi (reprezentowanymi przez wyniki symulacji), wystarczającą do uznania formuł (8) i (12) za pozwalające na wiarygodne praktyczne zastosowanie.

Z kolei rysunek 4 przedstawia zmiany rzeczywistego poziomu obsługi POP w zależności od wartości ilorazu  $\frac{T}{\tau}$ , przy zastosowaniu poziomu ZI<sub>kor</sub> (według formuły 12) wyznaczonego dla dwóch różnych poziomów obsługi POP<sub>o</sub>=95%, oraz POP<sub>o</sub>=99%, dla przyjętego rozkładu (1) o współczynniku zmienności popytu równym  $v_p \approx 0,14$ . Także w tym przypadku wyniki wskazują na wystarczającą zgodność rzeczywistych wartości POP<sub>rz</sub> otrzymanych w drodze symulacji z wartościami założonymi (oczekiwanymi).



Rys. 3. Porównanie teoretycznych (zgodnie z formułą 12) i otrzymanych w drodze symulacji przebiegów zmian poziomu obsługi w funkcji ilorazu  $\frac{T}{\tau}$  dla oczekiwanego poziomu obsługi  $POP_o=95\%$ .  
Źródło: opracowanie własne.

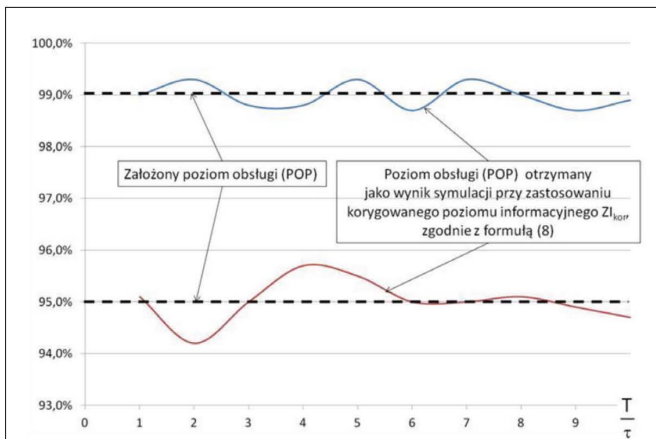
Wobec obserwowanej dużej zgodności wartości poziomu obsługi otrzymanych w wyniku symulacji z uzyskanymi przy zastosowaniu wzorów (8) i (12), wykonano szereg obliczeń korzystając z obu wymienionych formuł dla określenia wpływu różnych czynników na:

- różnice pomiędzy oczekiwanym, a rzeczywistym poziomem obsługi w przypadku zaniedbania omawianego zjawiska powstawania opóźnień w składaniu zamówień i przyjęciu poziomu informacyjnego zgodnie z formułą (1) – rysunki 5. a
- poziom koniecznych korekt (wyrażonych procentowo) poziomu informacyjnego wynikających z zastosowania poziomu  $ZI_{kor}$ , zgodnie ze wzorem (12) – rysunki 5. b. Poziom korekt był wyznaczany ze wzoru:

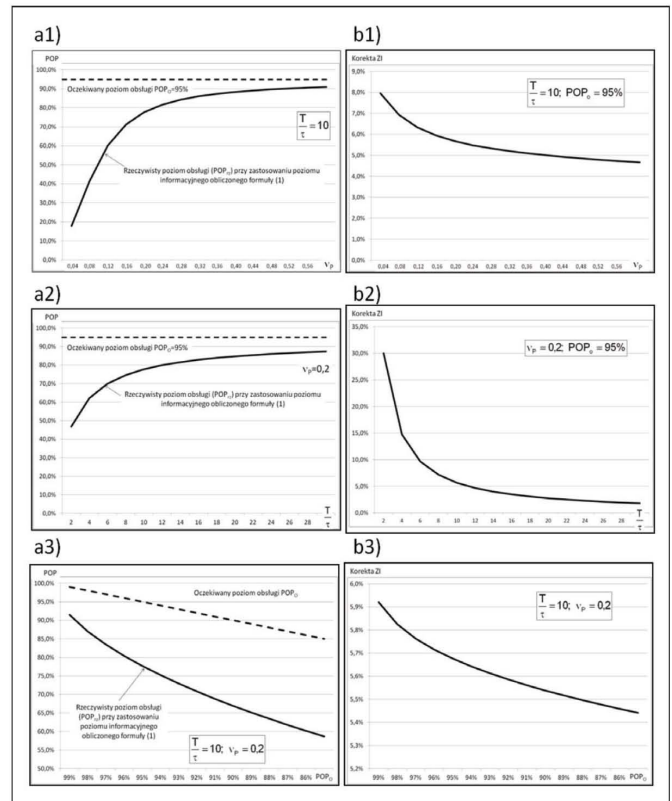
$$\frac{ZI_{kor} - ZI}{ZI} \cdot 100\%$$

Czynnikami, których wpływ na obie wielkości badano, były:

- iloraz czasu cyklu uzupełnienia  $T$  oraz czasu cyklu możliwych zamówień  $\tau$  (rysunki 5.1)
- współczynnik zmienności dziennego popytu  $v_p$  (rysunki 5.2)
- założony (oczekiwany) poziom obsługi  $POP_o$ . (rysunki 5.3).



Rys. 4. Porównanie założonych i otrzymanych w drodze symulacji przebiegów zmian poziomu obsługi w funkcji ilorazu  $\frac{T}{\tau}$  dla popytu o współczynniku zmienności równym  $v_p \approx 0,14$ . Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Wpływ zmian wybranych parametrów na: (a) różnice pomiędzy oczekiwanym, a rzeczywistym poziomem obsługi w przypadku zaniedbania omawianego zjawiska powstawania opóźnień w składaniu zamówień i przyjęciu poziomu informacyjnego zgodnie z formułą (1), (b) poziom koniecznych korekt (wyrażonych procentowo) poziomu informacyjnego, wynikających z zastosowania poziomu  $ZI_{kor}$ , zgodnie ze wzorem (12).  
Źródło: opracowanie własne.

## Podsumowanie

Przedstawione wyniki wskazują na potrzebę uwzględniania w obliczeniach poziomu informacyjnego zapasu (jako jednego z dwóch parametrów sterujących odnawianiem zapasu opartym na tym poziomie) nieciągłości przeglądu, wyrażającej się większym od zera czasem cyklu możliwych przeglądów  $\tau$ .

Przeprowadzone badania symulacyjne pozwoliły zaproponować typ rozkładu czasu opóźnienia  $\Delta T$  (rozkład jednostajny) i – na tej podstawie – wyprowadzić wzór na korygowany poziom informacyjny  $ZI_{kor}$ . Dalsze badania potwierdziły zgodność zaproponowanych wzorów z wynikami symulacji w przyjętych przedziałach zmienności wybranych parametrów.

Przyjęte formuły pozwalają nie tylko wyznaczyć korygowany poziom informacyjny  $ZI_{kor}$  gwarantujący osiągnięcie zakładanego poziomu obsługi, ale także określić rzeczywisty poziom obsługi otrzymywany w przypadku zaniedbania wpływu nieciągłości przeglądu.

## LITERATURA

1. Benjamin Jack R., Cornell C. Allin, *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977.
2. Krzyżaniak S., *Podstawy zarządzania zasobami w przykładach*, wyd. 4, IiM, Poznań 2008.
3. Sarjusz-Wolski Z., *Sterowanie zasobami w przedsiębiorstwie*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000.