Mariusz Izdebski[1], Marianna Jacyna[2]
Wydział Transportu Politechniki Warszawskiej

Model przydziału zasobów do zadań w przedsiębiorstwie transportowym

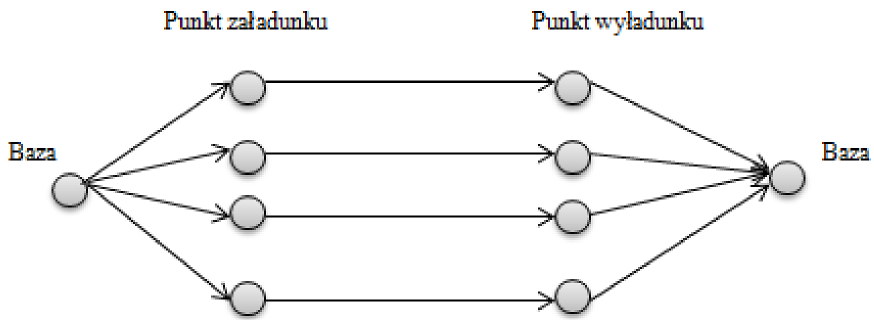
1. WPROWADZENIE

Decyzja przydziału zadań do posiadanych zasobów jest problemem każdego przedsiębiorstwa. Różnorodność przedsiębiorstw transportowych narzuca różne podejście do problemu przydziału. Od charakteru przedsiębiorstw zależy rodzaj wykonywanych zadań. W przedsiębiorstwie komunikacyjnym zadanie transportowe można zdefiniować jako przewóz pasażerów na określonej linii komunikacyjnej. Problemem przydziału w tym przypadku jest dobór pojazdów do poszczególnych linii, uwzględniający ograniczenia w postaci maksymalnych potoków pasażerów na danej trasie, czy dany rozkład jazdy.

W przedsiębiorstwie transportowym zadanie przewozowe możemy zdefiniować jako przewóz ładunku z punktu pobrania do punktu dostawy. Należy zaznaczyć, iż zadania rozpoczynają się i kończą w różnych przedziałach czasowych. W czasie jednego wyjazdu z bazy, realizując jedną zaplanowaną trasę, pojazd może wykonać kilka zleconych zadań. Problemem przydziału w tym przypadku jest skierowanie pojazdów kończących realizację bieżących zadań do następnych zadań w taki sposób, aby łączna suma odcinków dojazdowych do poszczególnych zadań była minimalna.

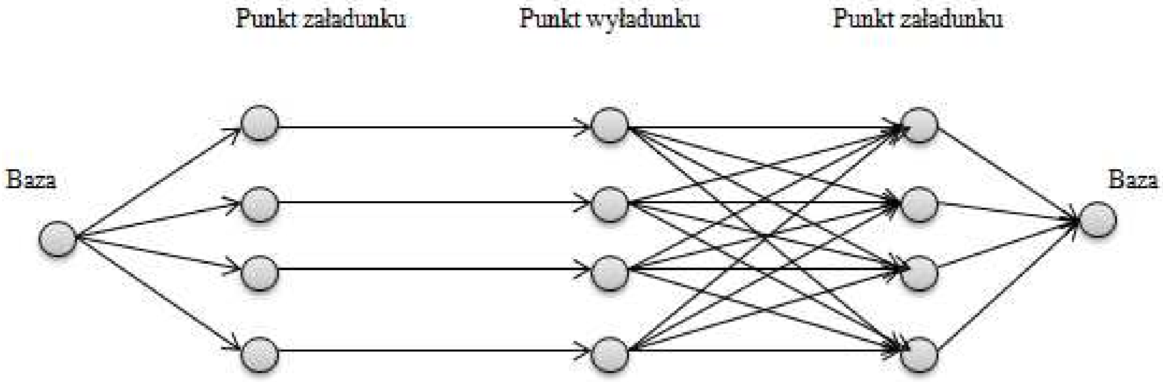
Zakładając, że zadanie transportowe można przedstawić graficznie jako dwa wierzchołki grafu dwudzielnego: pierwszy wierzchołek to punkt załadunkowy a drugi punkt wyładunkowy można zdefiniować problem przydziału jako znalezienie odpowiedniego dopasowania między punktem końcowym realizowanego zadania a punktem początkowym następnego zadania tak, aby dokonany przydział wygenerował trasę minimalną spełniającą oczywiście warunki ograniczeń czasowych. Ograniczenia czasowe to określona godzina przybycia na miejsce pobrania, określona godzina dostarczenia ładunku, czas trwania wyładunku i rozładunku, oraz brane są pod uwagę dobowe czasy pracy kierowców.

Nieekonomicznym i nieracjonalnym przydziałem jest przypisanie jednego pojazdu do jednego zadania (rys.1), bez możliwości szukania rozwiązań wielozadaniowych (rys. 2), czyli takich w którym jeden pojazd realizuje kilka zleconych zadań, nie wraca do bazy po wykonaniu pierwszego zadania. W interesie przedsiębiorstwa jest to, aby przydział kolejnych zadań realizowanych przez pojazdy odbył się kosztem minimalnych dróg. Problem przydziału ma miejsce w rozwiązaniach wielozadaniowych, gdzie następuje kombinacja rozwiązań po zrealizowaniu pierwszego zadania. Należy zaznaczyć, iż ograniczenia czasowe wpływają na proces przydziału pojazdów do zadań i nie zawsze jest możliwa decyzja przydziału do następnych zadań.



Rys 1. Schemat jednozadaniowej trasy przewozowej.
Źródło: opracowanie własne.

[1] izdebski.mariusz@interia.pl
[2] maja@it.pw.edu.pl



Rys 2. Schemat tworzenia dwuzadaniowej trasy przewozowej.
Źródło: opracowanie własne.

2. CHARAKTERYSTYKA OGÓLNEGO PROBLEMU PRZYDZIAŁU

W literaturze problemu pojęcie przydziału zdefiniowane jest jako przyporządkowanie ustalonej liczby zadań do określonej liczby wykonawców przy założeniu, iż wykonawcy potrafią realizować każdą z czynności. Każda czynność może być przydzielona tylko jednemu wykonawcy i odwrotnie – każdy wykonawca może realizować tylko jedną czynność [8].

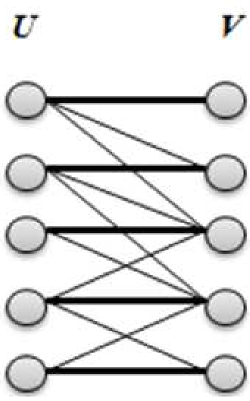
Graficznie model przydziału można przedstawić za pomocą grafu dwudzielnego [10], [3] składającego się ze zbiorów wierzchołków $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ oraz zbioru łuków $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}; \boldsymbol{E}) \tag{1}$$

gdzie:

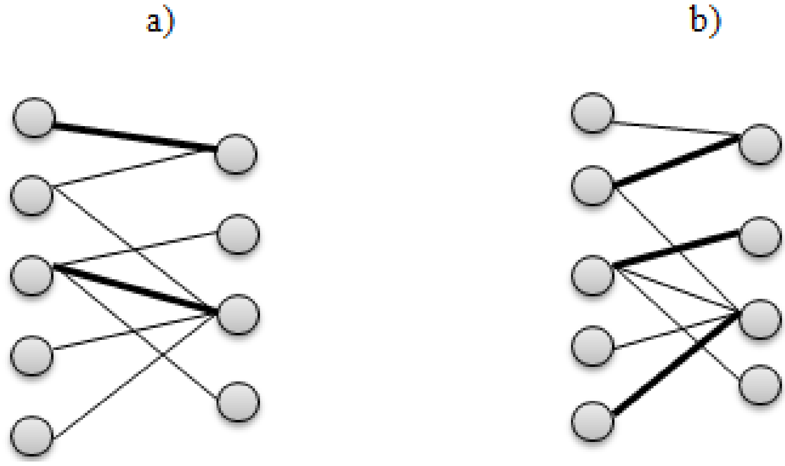
- $\boldsymbol{U}$ - zbiór wierzchołków grafu dwudzielnego reprezentujący elementy do przydziału np.: urządzenia, pracownicy, $\boldsymbol{U} = \{i : i = 1,2,...,\overline{N}\}$, $\overline{N}$ – liczebność zbioru $\boldsymbol{U}$, i – kolejny element
- $\boldsymbol{V}$ - zbiór wierzchołków grafu dwudzielnego reprezentujący zadania/czynności do przydziału, $\boldsymbol{V} = \{j : j = 1,2,...,\overline{S}\}$, $\overline{S}$ – liczebność zbioru $\boldsymbol{V}$, j – kolejny element zbioru $\boldsymbol{V}$.
- $\boldsymbol{E}$ - zbiór łuków grafu dwudzielnego reprezentujący istniejące relacje pomiędzy wierzchołkami $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$.

W celu wyznaczenia przydziału określa się dodatkowo zbiór $\boldsymbol{M}$ tzw. zbiór skojarzenia (ang. maching) [2], [15] taki że $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{E}$. Przez skojarzenie (pogrubione krawędzie na Rys.3) jest rozumiane połączenie dokładnie jednego wierzchołka ze zbioru $\boldsymbol{U}$ z dokładnie jednym wierzchołkiem ze zbioru $\boldsymbol{V}$. Relacje takiego typu tworzą zbiór $\boldsymbol{M}$. Problem określenia najlepszego skojarzenia $\boldsymbol{M}$ jest podstawowym problemem przydziału, szeroko opisanym w literaturze przedmiotu [4], [12], [9].



Rys.3 Problem przydziału jako graf dwudzielny o wierzchołkach $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}$ i relacji $\boldsymbol{E} = (i, j)$.
Źródło: na podstawie [2], [3].

W problemie przydziału dąży się do uzyskania maksymalnego skojarzenia (Rys.4b). Maksymalnym skojarzeniem określamy największy zbiór skojarzeń $\boldsymbol{M}$ wierzchołków grafu $\boldsymbol{G}$, bez możliwości powiększenia go o dodatkowe skojarzenie [2]. Najlepszym rozwiązaniem jest uzyskanie tzw. skojarzenia „perfekcyjnego" jednak warunkiem na takie skojarzenie jest $|\boldsymbol{U}| = |\boldsymbol{V}|$, co w realnych sytuacjach jest trudne do osiągnięcia (rys. 3).



Rys.4 Przykład skojarzenia w grafie dwudzielnym: a) o liczności 2, b) maksymalne skojarzenie o liczności 3.
Źródło: na podstawie [2].

Problem przydziału należy do problemu optymalizacji liniowej, dyskretnej. Zmienne decyzyjne przyjmują wartość 0 lub 1. Najbardziej popularną metodą obliczenia tego typu problemu jest metoda węgierska [8]. Istnieją też liczne publikacje rozwiązujące ten typ problemu metodami heurystycznymi [13], [14]. Klasyczny problem przydziału jest problemem kombinatorycznym. Przy *n* zadaniach liczba permutacji przydziałów zasobów do zadań wynosi *n*! Przykładowo przy 10 zasobach i zadaniach liczba rozwiązań wynosi 3.628.800. Złożoność wykładnicza rozwiązania czasowego tego problemu klasyfikuje go do tzw. problemów NP- zupełnych.

W zagadnieniach praktycznych problem przydziału jest problemem zmodyfikowanym i znacznie trudniejszym do rozwiązania metodami optymalizacji liniowej, a w szczególności powszechnie stosowanym algorytmem węgierskim. W zagadnieniach przydziału zadań do zasobów w przedsiębiorstwie transportowym staje się nieużytecznym narzędziem optymalizacyjnym. Algorytm ten zakłada przydział jednej czynności do jednego zadania, a co nie sprawdza się w praktyce danego przedsiębiorstwa. Liczne ograniczenia czasowe, ładunkowe zmuszają do stworzenia algorytmów uwzględniających wszystkie warunki narzucone w procesie transportu.

W literaturze problem przydziału pojazdów do zadań w przedsiębiorstwie transportowym rozwiązywany został przy użyciu wspomnianych już wcześniej metod heurystycznych tj. algorytmów genetyczne, algorytm roju cząstek, czy zbiorów rozmytych [16], [11]. Różnorodność ograniczeń, specyfika danej firmy sprawia, że problem można modyfikować i jest to podstawa do dalszych badań nad tym zagadnieniem.

3. Identyfikacja elementów modelu przydziału

Problem przydziału w przedsiębiorstwie transportowym jest problemem umiejscowionym w systemie transportowym, więc należy określić elementy systemu transportowego. System transportowy[5],[6] można przedstawić jako graf $\boldsymbol{G}$ tj.:

$$\boldsymbol{G} = < \boldsymbol{W}, \boldsymbol{L} > \tag{2}$$

gdzie:

$\boldsymbol{W}$ – zbiór numerów wierzchołków grafu $\boldsymbol{G}$. Przyjmujemy, że wierzchołki grafu mają interpretację węzłów sieci transportowej.

$\boldsymbol{L}$ – zbiór łuków grafu $\boldsymbol{G}$. Przyjmujemy, że łuki grafu mają interpretację połączeń transportowych pomiędzy węzłami sieci transportowej.

Węzłami sieci transportowej [5], [6] określimy punkty załadunku, wyładunku towaru, punkty rozpoczęcia i zakończenia trasy. Przyjmujemy, że zbiór $\boldsymbol{W}$ jest sumą zbiorów $\boldsymbol{W^Z}$, $\boldsymbol{W^W}$, $\boldsymbol{W^B}$, tj.:

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W^Z} \cup \boldsymbol{W^W} \cup \boldsymbol{W^B} \tag{3}$$

gdzie:
$\boldsymbol{W^Z}$ – zbiór numerów punktów załadunkowych, $\boldsymbol{W^Z} = \{1, \dots, i, \dots, W^z\}$, i – kolejny element zbioru $\boldsymbol{W^Z}$,
$\boldsymbol{W^W}$ – zbiór numerów punktów wyładunkowych, $\boldsymbol{W^W} = \{1, \dots, j, \dots, W^w\}$, j – kolejny element zbioru $\boldsymbol{W^W}$,
$\boldsymbol{W^B}$ – zbiór numerów baz transportowych, $\boldsymbol{W^B} = \{1, \dots, b, \dots, W^b\}$, b – kolejny element zbioru $\boldsymbol{W^B}$,
Zbiór łuków $\boldsymbol{L}$ w grafie $\boldsymbol{G}$ można określić jako suma zbiorów $\boldsymbol{L1}$, $\boldsymbol{L2}$, $\boldsymbol{L3}$, $\boldsymbol{L4}$, tj.:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L1} \cup \boldsymbol{L2} \cup \boldsymbol{L3} \cup \boldsymbol{L4} \tag{4}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{L1} = \{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}): (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}) \in \boldsymbol{W^Z} \times \boldsymbol{W^W}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}\}$$
$$\boldsymbol{L2} = \{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}): (\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}) \in \boldsymbol{W^W} \times \boldsymbol{W^Z}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}\}$$
$$\boldsymbol{L3} = \{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}): (\boldsymbol{b},\boldsymbol{i}) \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{B}} \times \mathbf{W}^{\boldsymbol{Z}}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{i} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{Z}}\}$$
$$\boldsymbol{L4} = \{(\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}): (\boldsymbol{j},\boldsymbol{b}) \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{W}} \times \mathbf{W}^{\boldsymbol{B}}, \boldsymbol{j} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{W}}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{B}}\}$$

W celu określenia zbioru pojazdów realizujących wszystkie zadania przewozowe wprowadza się zbiór $\boldsymbol{P}$, indeksem p oznaczymy kolejny pojazd tj.:

$$\boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{1}, \dots, \boldsymbol{p}, \dots, \boldsymbol{P}\} \tag{5}$$

Zakładamy, że dla każdego pojazdu o numerze p zdefiniowano:

– macierz czasu jazdy między punktem załadunku a wyładunku:

$$\boldsymbol{T1} = \left[\boldsymbol{t1}\big(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})\big)\right], \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W} \tag{6}$$

– macierz czasu jazdy między punktem wyładunku a załadunku:

$$\boldsymbol{T2} = \left[\boldsymbol{t2}\big(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})\big)\right], \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z} \tag{7}$$

– macierz czasu jazdy między bazą a punktem załadunku :

$$\boldsymbol{T3} = \left[\boldsymbol{t3}\big(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{b},\boldsymbol{i})\big)\right], \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W^B}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z} \tag{8}$$

– macierz czasu jazdy między punktem wyładunku a bazą :

$$\boldsymbol{T4} = \left[\boldsymbol{t4}\big(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j},\boldsymbol{b})\big)\right], \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W^B} \tag{9}$$

– wektor czasu załadunku pojazdu w danym punkcie załadunkowym:

$$\boldsymbol{T7} = [\,\boldsymbol{t7}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{i}): \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}] \tag{10}$$

– wektor czasu rozładunku pojazdu w danym punkcie rozładunkowym:

$$\boldsymbol{T8} = [\boldsymbol{t8}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{j}): \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^w}] \tag{11}$$

– wektor ładowności pojazdów:

$$\boldsymbol{V} = [\,\boldsymbol{\varphi 1}(\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{p} \in \mathbf{P}] \tag{12}$$

Dla punktów załadunkowych i wyładunkowych zdefiniowano:

– wektor harmonogramu załadunku/ godziny załadunków:

$$\boldsymbol{T5} = [\, \boldsymbol{t5}(\boldsymbol{i}) : \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}] \tag{13}$$

– wektor harmonogramu wyładunku/ godziny wyładunków:

$$\boldsymbol{T6} = [\, \boldsymbol{t6}(\boldsymbol{j}) : \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}] \tag{14}$$

Dla punktu załadunkowego zdefiniowano wektor wielkości zlecenia/ ilość pobranego towaru:

$$\boldsymbol{A} = [\, \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{i}) : \boldsymbol{i} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{Z}}] \tag{15}$$

W celu określenia odległości między punktem wyładunku a załadunku wprowadzono macierz odległości tj.:

$$\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{w}(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})], \boldsymbol{j} \in \mathbf{W}^{\boldsymbol{W}}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z} \tag{16}$$

4. SFORMUŁOWANIE ZADANIA OPTYMALIZACYJNEGO Z OGRANICZENIAMI

Dla danych: $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{T1}, \boldsymbol{T2}, \boldsymbol{T3}, \boldsymbol{T4}, \boldsymbol{T5}, \boldsymbol{T6}, \boldsymbol{T7}, \boldsymbol{T8}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}$ problem wyznaczenia przydziału pojazdów kończących realizację danego zadania do następnego zadania przy zachowaniu kryterium minimalnych odcinków dojazdowych między tymi zadaniami sprowadza się do wyznaczenia zmiennej decyzyjnej:

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})) = \begin{cases} \mathbf{1} - \textbf{istnieje połączenie z } (\boldsymbol{j}) \textbf{ do } (\boldsymbol{i}) \textbf{ realizowane przez pojazd} \\ \mathbf{0} - \textbf{w przeciwnym przypadku} \end{cases} \tag{1}$$

tak aby:

$$F(X) = \sum_{p \in \boldsymbol{P}} \sum_{i \in \mathbf{W}^{Z}} \sum_{j \in \boldsymbol{W^W}} x(p, (j, i)) \cdot w(j, i) \longrightarrow \min \tag{2}$$

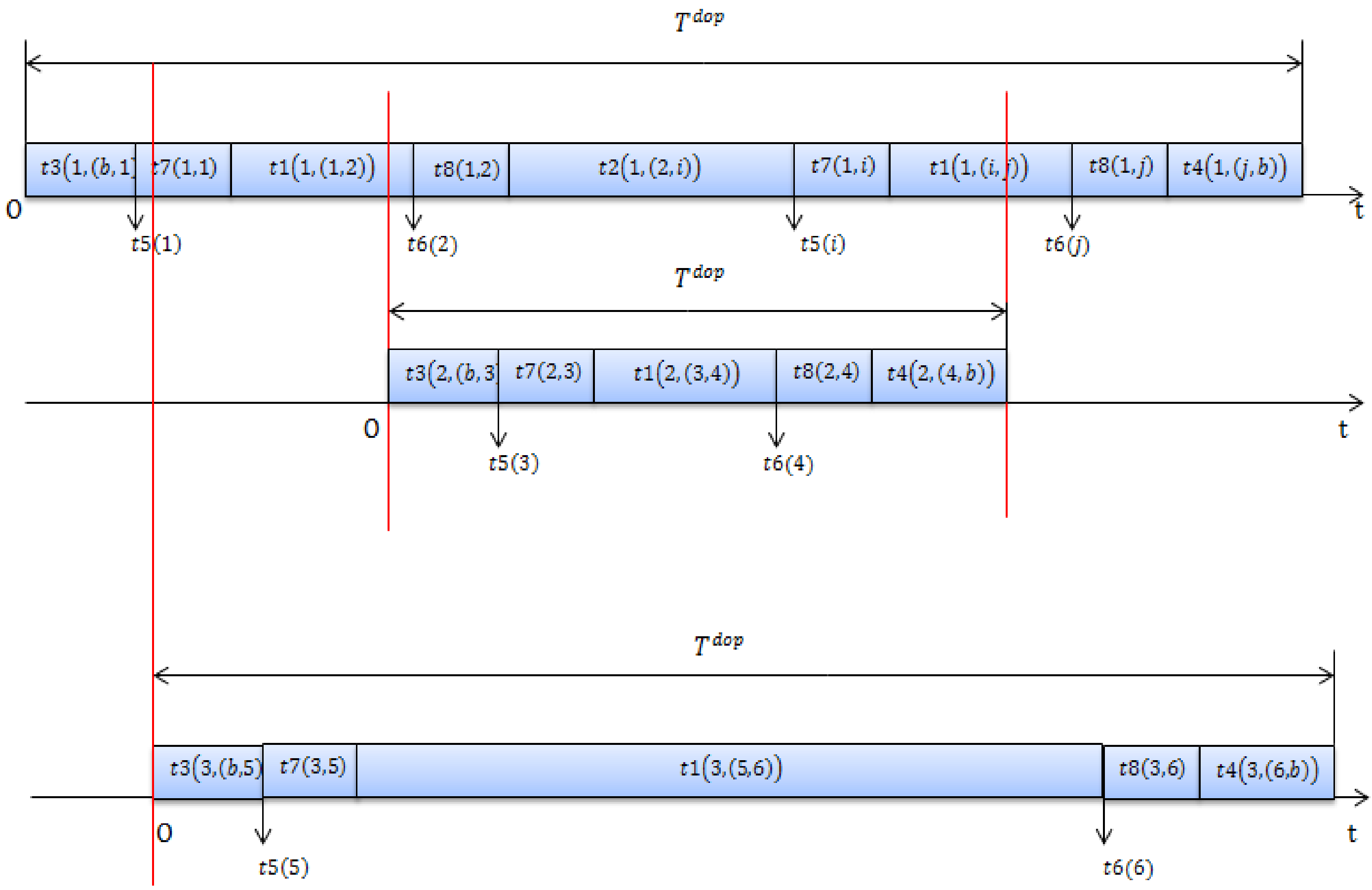
przy ograniczeniach:

– Zadania transportowe mogą rozpoczynać się i kończyć w różnych momentach czasowych, czasy realizacji zadań są różne, więc może zaistnieć moment w których nie wystąpi możliwość przydziału do kolejnego zadania. Realizacje czasów zadań nachodzących na siebie (rys. 5), powodują to, że nie ma sposobności przydzielenia pojazdu do następnych zadań. Ważnym czynnikiem w zaistnieniu przydziału jest odległość punktów wyładunkowych i załadunkowych.

  Przydzielenie pojazdu do więcej niż jednego zadania wprowadza następujące ograniczenie czasowego:

$$\forall\, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^W}\ \boldsymbol{t6}(\boldsymbol{j}) + \boldsymbol{t8}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{j}) + \boldsymbol{t2}(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})) \cdot \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})) + \boldsymbol{T^{odp}} \le \boldsymbol{t5}(\boldsymbol{i}) \tag{19}$$

gdzie T^{odp}- ustawowy czas odpoczynku w trasie.



Rys. 5. Ograniczenia czasowe zadań przewozowych.

Źródło: opracowanie własne.

– Maksymalny czas jazdy kierowcy określony jest przez rozporządzenie 561/2006[3]. Ograniczenie czasu jazdy kierowcy przedstawia wzór :

$$\forall p \in \boldsymbol{P}, i \in \boldsymbol{W^Z}, j \in \boldsymbol{W^W}\ t3\big(p,(b,i)\big) + \sum_{i \in \mathbf{W}^Z} \sum_{j \in \boldsymbol{W}^W} t1\big(p,(i,j)\big) +$$
$$+ \sum_{j \in \boldsymbol{W}^W} \sum_{i \in \mathbf{W}^Z} t2\big(p,(j,i)\big) \cdot x\big(p,(j,i)\big) + t4\big(p,(j,b)\big) \le T^{dop}, \tag{4}$$

gdzie T^{dop} – maksymalny czas jazdy kierowcy.

– Maksymalny czas pracy kierowcy określony jest ustawowo[4]. Ograniczenie czasu jazdy przedstawia wzór:

$$\forall p \in \boldsymbol{P}, i \in \ \boldsymbol{W^Z}, j \in \ \boldsymbol{W^W}$$

$$t3\big(p,(b,i)\big) + \sum_{i \in \mathbf{W}^Z} t7(p,i) + \sum_{i \in \mathbf{W}^Z} \sum_{j \in \boldsymbol{W}^W} t1\big(p,(i,j)\big)$$
$$+ \sum_{j \in \boldsymbol{W}^W} t8(p,j) + \sum_{j \in \boldsymbol{W}^W} \sum_{i \in \mathbf{W}^Z} t2\big(p,(j,i)\big) \cdot x\big(p,(j,i)\big) + t4\big(p,(j,b)\big) \le T^{dop1} \tag{5}$$

gdzie T^{dop1}– maksymalny czas pracy kierowcy.

[3] Rozporządzenie 561/2006 Parlamentu Europejskiego i Rady z 15 marca 2006 r. w sprawie harmonizacji niektórych przepisów socjalnych odnoszących się do transportu drogowego

[4] Ustawa z dnia 16 kwietnia 2004 r o czasie pracy kierowców.

– Ograniczenie ładowności przydzielonego pojazdu do zadania:

$$\forall\, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}, \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{W^Z}, \boldsymbol{j} \in \boldsymbol{W^w}\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{i})) \cdot \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{i}) \leq \boldsymbol{\varphi 1}(\boldsymbol{p}) \tag{6}$$

5. WNIOSKI

Problem przydziału w przedsiębiorstwie transportowym decydująco wpływa na kondycję finansową przedsiębiorstwa. Odpowiednio zoptymalizowany proces przydziału pozwoli wygenerować oszczędności w eksploatacji taboru, paliwie a także wskazać odpowiedni poziom zatrudnienia pracowników. Przydział zadań do dysponowanych zasobów, czyli kierowców lub pojazdów w przedsiębiorstwie transportowym jest jednym z etapów tworzenia harmonogramów pracy kierowców [8]. Poprawnie skonstruowany harmonogram[1] zawiera informację na temat: przedmiotu przewozu, środka przewozu, ilości towaru/osób przewożonych, czasu rozpoczęcia i zakończenia usługi. Należy ponadto dokonać przydziału zadań do pojazdów wykonujących określoną trasę i w tym momencie pojawia się problem wskazania, które zadanie ma być realizowane przez dany pojazd, aby zminimalizować trasy dojazdowe do tych zadań.

Streszczenie

W artykule zdefiniowano ogólny problem przydziału, wyjaśniono pojęcie skojarzenia w grafie dwudzielnym a następnie opisano problem przydziału w przedsiębiorstwie transportowym. Wyznaczono model matematyczny przydziału, funkcję optymalizacyjną wraz z ograniczeniami.

Słowa kluczowe: problem przydziału, skojarzenie, graf dwudzielny.

The assignment model of tasks to resources in the transport company

Abstract

This article defines a general assignment problem and explains definition of a matching in a bipartite graph. This paper describes an assignment problem of tasks to resources in the transport company. This article contains the mathematical allocation model of tasks, function optimization with constrains.

Key words: assignment problem, matching, bipartite graph.

LITERATURA

[1] Ambroziak T.: Metody i narzędzia harmonogramowania w transporcie. Biblioteka problemów eksploatacji, Wydawnictwo Instytutu technologii i Eksploatacji – PIB, Warszawa 2007.
[2] Burkrd R, Dell'Amico, Marttelo S.: Assignment_problems Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia 2009r.
[3] Cormen T.H, Leiserson Ch.E, Rivest R.L.: Wprowadzenie do algorytmów. Wydawnictwo Naukowo Techniczne Warszawa 2001r.
[4] Hopcroft J.E, Karp R.M.: An n5/2 algorithm for maximum machings in bipartite graphs. SIAM Journal on Computing 2 (4), 1973, 225-231.
[5] Jacyna M.: Modelowanie i ocena systemów transportowych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
[6] Jędrzejczyk Z, Kukuła K, Skrzypek J, Walkosz A.: Badania operacyjne w przykładach i zadaniach, Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 1996.
[7] Kisielewski P.: Optymalizacja przydziału zadań transportowych" Politechnika Krakowska. „Problemy Eksploatacji rok: 2007, nr 2, s. 55--63, Bibliogr. 9 poz.
[8] Kulikowski J.L.: Zarys teorii grafów. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.
[9] Lonc Z.: Wstęp do algorytmicznej teorii grafów. Centrum studiów zaawansowanych Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2010r.
[10] Milosavljevića N, Teodorovića D, Papića V & Pavkovića G.: A fuzzy approach to the vehicle assignment problem, Transportation Planning and Technology Volume 20, Issue 1, 1996.

[11] Micali S, Vazirani V.V.: An $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. Proc. 21st IEEE Symp. Foundations of Computer Science, 1980,17-27.
[12] Sahu A, Tapadar R.: Solving the Assignment problem using Genetic Algorithm and Simulated Annealing, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 36:1, IJAM_36_1_7
[13] Symington K. J, Snowdon J. F, Solving the Assignment Problem Using Neural Networks, Department of Physics, Heriot-Watt University, Edinburgh, UK, June 1999.
[14] Wilson R.J.: Wprowadzenie do teorii grafów. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2007.
[15] Yusoff M, Ariffin J, Mohamed A.: Solving Vehicle Assignment Problem Using Evolutionary Computation, Lecture Notes in Computer Science, 2010, Volume 6145/2010

Acknowledgment

Artykuł jest efektem pracy w ramach grantu dziekańskiego pt. „ Model przydziału zasobów w przedsiębiorstwie transportowym”.