

KISIŁOWSKI Jerzy¹
ZALEWSKI Jarosław²

Stateczność pojazdów szynowych i samochodowych

Słowa kluczowe: stateczność, model matematyczny, pojazd szynowy, pojazd samochodowy

Streszczenie

Praca zawiera kilka różnych podejść do zagadnienia stateczności modeli matematycznych pojazdów szynowych i samochodowych. Przeprowadzono analizę stateczności technicznej modelu matematycznego opierając się na właściwościach maksymalnej i minimalnej wartości własnej macierzy stanu (otrzymanej z równań ruchu układu pojazdu szynowego z wózkami 25TN) oraz wyznaczając funkcję Lapunowa. Zbadano stateczność tego modelu ze względu na parametry, na które funkcja Lapunowa jest najbardziej wrażliwa (badania wrażliwości pokazano w pracy [3]). Drugie zadanie to badanie stateczności technicznej stochastycznej (definicję zaczerpnięto z pracy [4]) nieliniowego modelu matematycznego pojazdu szynowego (wagon towarowy z wózkiem 25 TN) oraz pojazdu samochodowego (samochód Ferrari). W obydwu przypadkach zaburzenia pochodziły od nierówności toru i nierówności drogi. To zadanie zostało zrealizowane dla różnych parametrów pojazdu szynowego i samochodowego. Wyniki te odnoszono do rzeczywistych obiektów np. w pojeździe samochodowym do stateczności samochodu zdefiniowanego w normie ISO 8855:1991.

STABILITY OF RAILWAY AND ROAD VEHICLES

Abstract

This work contains several different approaches to the subject of stability of mathematical models of railway and road vehicles. Analysis of stochastic technical stability of mathematical model was conducted basing on the properties of maximal and minimal eigenvalues of state matrix (derived from the equations of motion of the railway vehicle with the 25TN bogies) and defining the Lapunov function. Stability of this model was examined in view of the parameters, on which the Lapunov function is most sensitive (sensitivity analysis was shown in [3]). Second task is the examination of stochastic technical stability (definition from work [4]) of nonlinear mathematical model of railway vehicle (freight car with 25TN bogies) and road sport car (Ferrari). In both cases the disturbances originated from the unevenness of the track or road respectfully. This task was realised for different parameters of both railway and road vehicle. The results were related to real object, for example in road vehicle to the stability defined in the norm ISO 8855:1991.

1. WSTĘP

Stateczność modeli matematycznych jest jednym z ważnych zadań badawczych, jeśli dodamy, że jeśli model matematyczny opisuje dynamikę układu rzeczywistego to wyniki powinny być odnoszone do warunków rzeczywistych. Aby tak było trzeba odpowiedzieć na dwa pytania, po pierwsze jak został przeprowadzony proces identyfikacji struktury i parametrów oraz po drugie jak do modelu wprowadzono zaburzenia zewnętrzne wywołujące zjawiska dynamiczne w badanym modelu. Odpowiedzi na te pytania pozwalają na dobór metody badania stateczności modeli matematycznych opisujących obiekty rzeczywiste. Obiekty te to pojazdy samochodowe i szynowe. Dla modeli tych obiektów zastosowano wspólną metodę badania stateczności.

Zagadnienie badania stateczności modeli matematycznych zaczerpnięto z prac [1], [2], [3] oraz [6]. Zadania te odnoszą się do badania modeli matematycznych opisujących rzeczywiste obiekty. Modele wyznaczano po procesie identyfikacji parametrów i struktur.

Prześledzenia wymaga proces doboru metody badania stateczności modelu matematycznego w aspekcie identyfikacji parametrów i struktury oraz uwzględnienia charakteru zaburzeń wywołujących zjawiska dynamiczne w modelach matematycznych. To zadanie powinno również odpowiadać na pytanie, dla jakich warunków można wyniki z modelu matematycznego odnieść do obiektu rzeczywistego funkcjonującego w określonych, rzeczywistych warunkach.

Przedstawione zostały wyniki badania stateczności dla różnych przyjmowanych założeń.

2. PRZEGLĄD METOD BADANIA STATECZNOŚCI

Dobór metody badania stateczności modelu matematycznego będzie zależał od cech danego modelu. Podział taki to głównie dwie grupy: modele liniowe i modele nieliniowe. Dla badania modeli liniowych układu o wielu stopniach swobody stosuje się najczęściej rachunek macierzowy. Jeśli ruch mas takiego układu opiszemy równaniem

¹ Prof. dr hab. inż., Wydział Transportu i Elektrotechniki Politechniki Radomskiej

² Dr inż., Wydział Administracji i Nauk Społecznych Politechniki Warszawskiej

$$A\ddot{\bar{q}} + B\dot{\bar{q}} + C\bar{q} = \bar{F}(t) \quad (1)$$

gdzie:

\bar{q} – wektor współrzędnych uogólnionych,

A – macierz masowo – bezwładnościowa,

B – macierz tłumień,

C – macierz sztywności,

$\bar{F}(t)$ – wektor zaburzeń,

to równanie można przekształcić do równania w postaci

$$\dot{\bar{x}} = G \cdot \bar{x} \quad (2)$$

gdzie:

$$G = \begin{bmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}C \\ I & O_1 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \bar{q} \end{bmatrix}$$

$$\dim I = \dim O_1 = n \times n,$$

$$\dim G = 2n \times 2n.$$

Równanie (2) nazywa się równaniem stanu, a macierz G nazywa się macierzą stanu. Równoważność równania (1) i (2) wykazano w pracy [3].

W wyniku rozwiązywania równania (2) otrzymamy wartości i wektory własne. Z punktu widzenia badania stateczności równania (1) będziemy się zajmować badaniem wartości własnej, którą zapisujemy w postaci

$$\lambda_j = a_j + ib_j \quad (3)$$

gdzie:

a_j – współczynnik tłumienia; jeśli dla wszystkich $a_j < 0$ to ruch obiektu jest asymptotycznie stateczny w sensie Lapunowa.

Wykorzystując wyniki obliczeń wartości własnych dla liniowego modelu matematycznego pojazdu szynowego (wagon towarowy z wózkami 25 TN) badano stateczność, a wyniki badań można znaleźć w pracy [3].

Inną metodą badania stateczności modeli matematycznych jest metoda oparta o kryterium Hurwitza. Jednak tej metody nie można polecić dla praktycznych zastosowań gdyż dla układu o wielu stopniach swobody sprawdzenie warunków Hurwitza jest niezwykle pracochłonne a użycie metody numerycznej jest efektywniejsze dla wyznaczania wartości własnych.

W badaniach poprzednio wspomnianego modelu (wagon towarowy z wózkami 25 TN) matematycznego dla drgań poprzecznych zestawu wykorzystano definicję stateczności technicznej [3]. Przedstawiono tę metodę badania stateczności dla układów liniowych z losowymi zaburzeniami. Rozważania cytowane za pracą [4].

Przekształcając równanie (1) otrzymamy

$$AA^1\ddot{\bar{z}} + BA^1\dot{\bar{z}} + CA^1\bar{z} = R(t, \bar{p}), \quad (4)$$

gdzie:

$$q_i = a_1 z_i, \quad i = 1, 4,$$

$$q_i = a_2 z_i, \quad i = 5, 6,$$

$$q_i = a_3 z_i, \quad i = 7, 8,$$

$$q_i = a_4 z_i, \quad i = 9, 10,$$

$$q_i = a_5 z_i, \quad i = 11,$$

dla których R_0 obszaru Ω jest równe 1 i dlatego może być przekształcone w przestrzeń n -wymiarową. Mnożąc lewą stronę układu (4) przez $(AA^1)^{-1}$ oraz sprowadzając go do współrzędnych stanu otrzymano następujący układ równań

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= \bar{u} \\ \dot{\bar{u}} &= -C_1 \bar{z} - B_1 \bar{u} + P(t) \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie $P(t) = (AA)^{-1}R(t, \bar{p})$, które w efekcie może zostać przedstawione w następującej postaci:

$$\dot{\bar{W}} = D\bar{W} + F(t, \bar{p}), \quad (6)$$

gdzie

$$D = \begin{bmatrix} O_{11} & I_{11} \\ -C_1 & -B_1 \end{bmatrix},$$

macierz blokowa 22 x 22,

O_{11} – macierz zerowa 11 x 11,

I_{11} – macierz jednostkowa 11 x 11,

$$F(t, \bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_1(t, \bar{x}) \\ \vdots \\ P_{11}(t, \bar{x}) \end{bmatrix},$$

$$B_1 = (AA^1)^{-1}BA^1, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}, \quad C_1 = (AA^1)^{-1}CA^1.$$

Łatwo wykazać, że dla równania (6) warunki omawianego twierdzenia o istnieniu rozwiązania są spełnione. Oznacza to, że

$$\int_0^T |D \cdot 0 + F(t, \bar{x})| dt = \int_0^T |F(t, \bar{p})| dt \leq \Lambda((AA^1)^{-1}) |R(t, \bar{p})|,$$

gdzie $\Lambda(X)$ – największy pierwiastek charakterystyczny macierzy X , natomiast dla $R(t, \bar{p})$ przyjęto, że jest ograniczone i dlatego

$$|D\bar{w}_2 + F(t, \bar{p}) - D\bar{w}_1 - F(t, \bar{p})| = |D(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)| \leq \|D\| |\bar{w}_2 - \bar{w}_1|,$$

$\|D\|$ – norma macierzy D dla zdeterminowanych wartości parametrów.

Następnie wyznaczono funkcję Lapunowa, którą dla układu (6) zdefiniowano jak poniżej:

$$V(\bar{w}) = V(\bar{z}, \bar{u}) = \frac{1}{2} \bar{u}^T \bar{u} + \frac{1}{4} \bar{z}^T (C_1 + C_1^T) \bar{z}, \quad (7)$$

gdzie indeks górny T oznacza transpozycję.

W kolejnym kroku policzono pochodną funkcji Lapunowa względem rozwiązań układu (6). Została ona określona przez następującą zależność:

$$\frac{d^0 V}{dt} = -\bar{u}^T (B_1 + B_1^T) \bar{u}. \quad (8)$$

Szczegółowe rozważania można znaleźć w pracy [4]. Otrzymane wyniki mogą natomiast zostać wykorzystane w programie wykorzystującym numeryczne metody badania stateczności.

W analizie stateczności wyszczególniono trzy parametry, które, jak się okazało, mają największy wpływ na obszary stateczności. Są to: k_ψ – sztywność między wózkiem a korpusem wagonu kolejowego wokół osi OZ, λ – ekwiwalentna stożkowatość, v – prędkość. Wybór wymienionych powyżej parametrów wynika z analizy wrażliwości oraz z praktycznych możliwości modyfikacji elementów rzeczywistej konstrukcji, jak i warunków eksploatacji. Zakładając, że λ jest stała dla stabilnych profili i równa 0.038 będzie analizowany wpływ, jaki mają parametry k_ψ oraz v na obszary stateczności w prostokącie wyznaczonym przez następujące nierówności:

$$k_{\psi \min} < k_{\psi} < k_{\psi \max}, \quad (9)$$

$$v_{\min} < v < v_{\max}.$$

Należy podkreślić, że dla stateczności liniowego układu zdefiniowanego w ten sposób łatwo jest udowodnić, że warunkiem koniecznym, aby system był stabilny w rozumieniu stochastycznym technicznym jest jego stabilność w sensie Lapunowa. Przykładowe wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Przykładowe wyniki badania stateczności układu liniowego

$v = 60 [km/h]$		$\lambda = 0.038$	$k_{\psi \max} = 10^6 [Nm/rad]$
			$k_{\psi \min} = 10^6 [Nm/rad]$
Graniczne wartości k_{ψ} dla stateczności w sensie Lapunowa		Graniczne wartości k_{ψ} dla stateczności w sensie technicznym i stochastycznym	
$k_{\psi} = 5.7 \cdot 10^6 [Nm/rad]$		$k_{\psi} = 6.5 \cdot 10^7 [Nm/rad]$	
$k_{\psi} = 2 \cdot 10^7 [Nm/rad]$	$\lambda = 0.038$	$v_{\max} = 150 [km/h]$	$v_{\min} = 20 [km/h]$
Graniczne wartości v dla stateczności w sensie Lapunowa		Graniczne wartości v dla stateczności w sensie technicznym i stochastycznym	
$v = 71 [km/h]$		$v = 47 [km/h]$	

Z przedstawionych rezultatów widać, że granice stabilności dla ruchów poprzecznych zależne są od parametrów układu. Ważne jest aby zaburzenia znalazły się w określonym obszarze ω .

Dalej rozwinięto badania stateczności wykorzystując definicje stateczności technicznej stochastycznej (STS), którą zastosowano dla badania układu z losowymi zaburzeniami. Definicja na podstawie pracy [2].

Stateczność techniczna stochastyczna jest definicją, którą najlepiej, spośród znanych definicji, można wykorzystać do badania ruchu modeli matematycznych obiektów technicznych. Głównym atutem tej definicji jest możliwość analizy ruchu modelowanego układu przy występowaniu losowych zaburzeń pochodzących np. od nierówności nawierzchni drogi w przypadku badania ruchu modelu matematycznego samochodu czy nierówności toru przy badaniu stateczności ruchu pojazdu szynowego. Wyniki badań można odnieść do wyników badań rzeczywistych obiektów technicznych.

Założenia.

Dany jest układ równań stochastycznych

$$\frac{dx}{dt} = f[x, t, \xi(t)] \quad (10)$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $f(x, t, y) = (f_1, \dots, f_n)$ są wektorami, natomiast $\xi(t) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $t \geq 0$ jest procesem stochastycznym opisującym losowo występujące zaburzenia. Dla funkcji $f(x, t, y)$ przyjęto założenia, że jest określona dla każdego $x \in E_n$, $y \in E_n$ i $t \geq 0$. Przyjęto również, że dla procesu stochastycznego $f(0, t, \xi(t))$ zachodzi

$$P \left\{ \int_0^T |f(0, t, \xi(t))| dt < \infty \right\} = 1, \text{ dla każdego } T > 0 \quad (11)$$

Założono również istnienie procesu stochastycznego $f(X, t, \xi(t))$, który spełnia kryterium Lipschitza w przedziale $[0, T]$

$$|f(x_2, t, \xi(t)) - f(x_1, t, \xi(t))| \leq \eta(t) |x_2 - x_1| \quad (12)$$

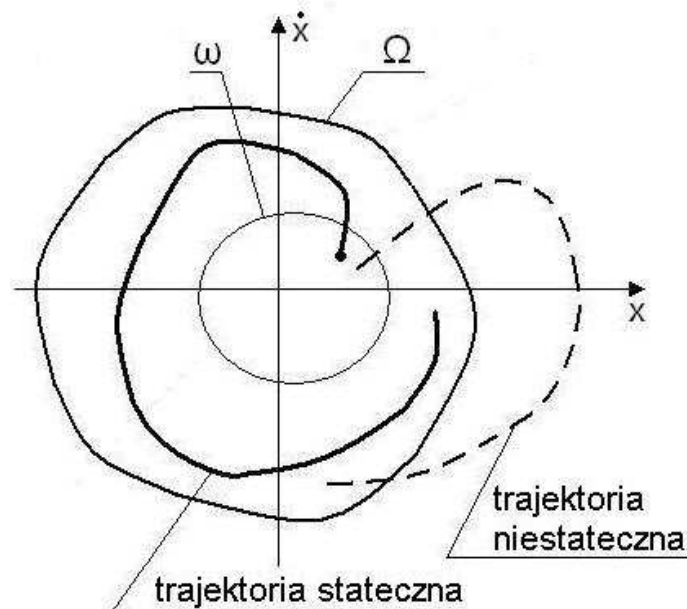
dla innego procesu $\eta(t)$, bezwzględnie całkowalnego w danym przedziale.

Wynikiem powyższych założeń jest istnienie tylko jednego rozwiązania z warunkami początkowymi $t = t_0$ oraz $x(t_0) = x_0$, które jest procesem stochastycznym bezwzględnie ciągłym, z prawdopodobieństwem 1 dla $t \geq t_0$.

Definicja stateczności technicznej stochastycznej.

Przyjęto istnienie dwu obszarów w przestrzeni euklidesowej E_n : ω – ograniczonego i otwartego oraz Ω – ograniczonego i zamkniętego, gdzie $\omega \subset \Omega$. Założono, że istnieje również liczba dodatnia ε , gdzie $0 < \varepsilon < 1$ oraz proces stochastyczny $X(t)$, określony dla $t \geq t_0$. Oznaczono również warunki początkowe rozwiązania przez $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$ oraz rozwiązanie przez (t, t_0, x_0) .

Definicja stateczności technicznej stochastycznej brzmi: jeśli każde rozwiązanie równania (10), mające warunki początkowe (t, t_0, x_0) w obszarze ω , należy do obszaru Ω z prawdopodobieństwem $1 - \varepsilon$, to układ (10) jest stateczny technicznie stochastycznie względem ω , Ω oraz procesu $\xi(t)$ z prawdopodobieństwem $1 - \varepsilon$ (rys. 1).



Rys. 1. Graficzna interpretacja stateczności technicznej stochastycznej [7]

$$P\{(t, t_0, x_0) \in \Omega\} > 1 - \varepsilon, \quad \text{dla } \bar{x}_0 \in \omega \quad (13)$$

Rozważania przeprowadzono dla modeli matematycznych pojazdu szynowego [5] oraz samochodu za pracą [6]. Za pracą [5] pokazane zostaną wyniki badań stateczności technicznej stochastycznej zestawu kołowego. Korzystając z przedstawionej definicji określono obszar Ω i ω dla drgań poprzecznych zestawu kołowego, co przedstawiono na rys. 2.

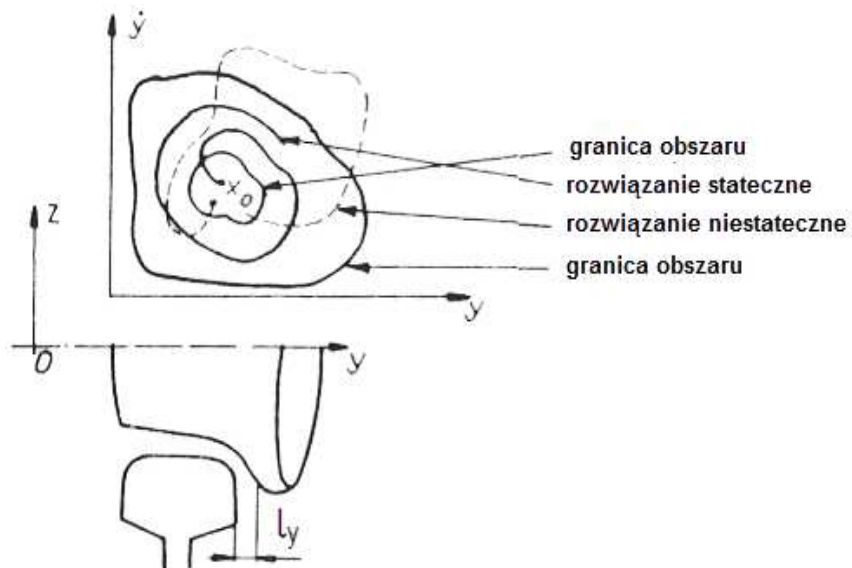
Jak widać obszar Ω został określony jako luz między obrzeżem koła i szyną i oznaczono l_y .

Badania stateczności technicznej stochastycznej przeprowadzono dla poprzecznych drgań układu o jedenastu stopniach swobody z zaburzeniami pochodzącymi o nierówności geometrycznych toru, zmiany szerokości toru oraz zmian profilu główki szyny [5].

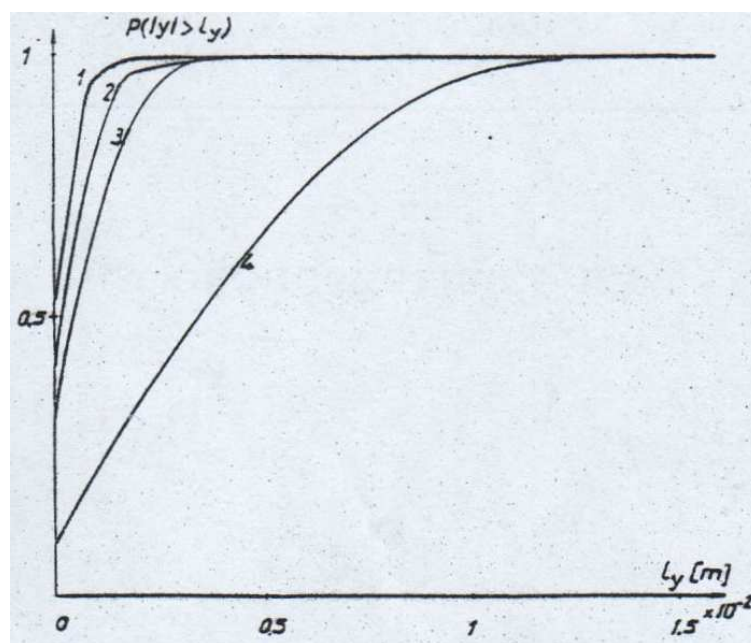
Przeprowadzono symulacyjną analizę stateczności technicznej stochastycznej. Wykorzystując przedstawioną metodę przeprowadzono szereg symulacji, w których badano prawdopodobieństwo ruchu statecznego przy różnych prędkościach (rys. 3).

Stateczność techniczną stochastyczną wykorzystano również w badaniu modelu matematycznego samochodu poruszającego się po nierównej nawierzchni drogi [6]. Zadanie to rozwiązano wykorzystując symulację ruchu samochodu, w którym na skutek wypadku bądź kolizji i niepoprawnej naprawy zaburzeniu uległy parametry masowo – bezwładnościowe. Dla takiego modelu (z zaburzonymi parametrami) przeprowadzono badanie stateczności technicznej stochastycznej i porównano z badaniami stateczności technicznej - stochastycznej bez zaburzenia parametrów. Graficznie zadanie przedstawiono na rys. 4 definiując obszar Ω . Metoda okazała się skuteczna; otrzymano również wyniki ilościowe – wykorzystując do analizy prawdopodobieństwa test λ Smirnowa-Kołmogorowa. Badania przeprowadzono na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Prawdopodobieństwo znalezienia się samochodu w skrajnym położeniu na drodze (dla samochodu z zaburzeniami parametrów masowo – bezwładnościowych wzrosło trzykrotnie). Przykład pokazuje możliwość wykorzystania badania stateczności technicznej stochastycznej dla nieliniowych modeli matematycznych samochodu.

W badaniu stateczności technicznej stochastycznej modelu matematycznego samochodu wykorzystano metodę jak w przypadku wagonu kolejowego [7], czyli podziału obszaru dopuszczalnych rozwiązań na klasy i badaniu prawdopodobieństwa znalezienia się rozwiązania w danej klasie. Metoda ta jest uniwersalna ze względu na możliwość doboru dopuszczalnych obszarów rozwiązań.

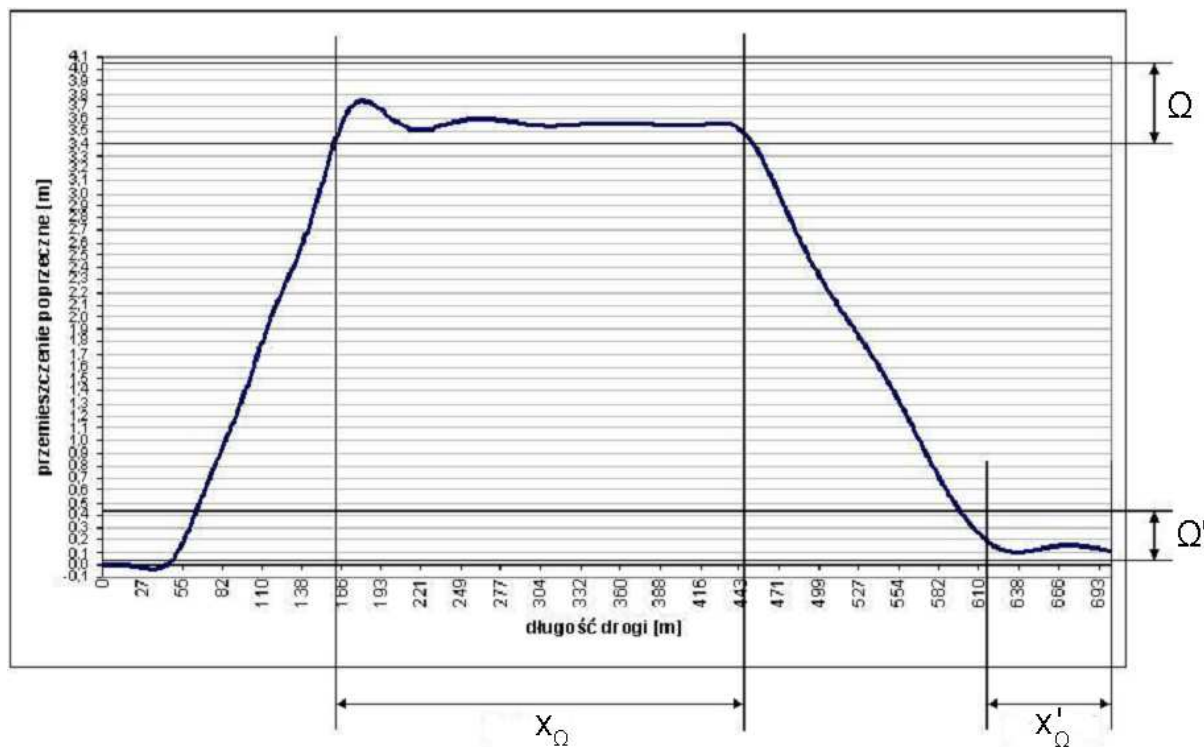


Rys. 2. Graficzna interpretacja stateczności technicznej stochastycznej zestawu kołowego wagonu kolejowego [5]



Rys. 3. Prawdopodobieństwo STS uzyskane w symulacji komputerowej ruchu wagonu kolejowego [4].

Prawdopodobieństwo STS: $P(\Omega) = P(|y| \leq l_y)$ (w odniesieniu do obszaru $\Omega = \{\bar{x} : |y| \leq l_y\}$) uzyskane w symulacji komputerowej ruchu wagonu kolejowego (11 stopni swobody) poruszającego się z prędkością: (1) $v=11,111\text{m/s}$, (2) $v=16,666\text{m/s}$, (3) $v=22,222\text{m/s}$ oraz (4) $v=27,777\text{m/s}$. (y jest przemieszczeniem poprzecznym środka masy zestawu kołowego).



Rys. 4. Obszary dopuszczalnych rozwiązań w badaniu STS modelu matematycznego samochodu [6]

Przykład pokazuje możliwości wykorzystania badania stateczności technicznej stochastycznej nieliniowych modeli matematycznych samochodu. Należy dodać, że takie badanie jest prawie identyczne jak badania stateczności wg normy ISO 8855:1991.

3. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy metody były w różnych publikacjach przedstawione cząstkowo. Z przedstawionych analiz można sformułować wniosek, że najefektywniejszą metodą badania stateczności jest to metoda stateczności technicznej stochastycznej. Ta metoda jest najbliższa do odnoszenia wyników z modeli matematycznych do układów rzeczywistych. Możliwości wynikają z badania trajektorii rozwiązań, którą zawsze można pomierzyć dla obiektu rzeczywistego. Dodatkowym atutem tej metody to możliwość rozważania całego zagadnienia w ujęciu losowym, co daje wyniki bliższe rzeczywistości. W pracy zaprezentowano rezultaty badań, które były prowadzone na przestrzeniach wielu lat, a są one do dzisiaj w sensie metodologii aktualne. Badania takie są niezwykle ważne zwłaszcza dla prędkości powyżej 200 km/h. Ten zakres prędkości nie był przedmiotem analiz stateczności w pracach, których analizy przedstawiono. Może być on przedmiotem dalszych badań.

4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Gutowski R., *Podstawy teorii stateczności ruchu układów dyskretnych i ciągłych*, Politechnika Warszawska, Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, 1981.
- [2] Bogusz W., *Stateczność techniczna*, Warszawa, PWN, 1972.
- [3] Kisilowski J. red., *Dynamika układu mechanicznego pojazdu szynowy tor*, Warszawa, PWN 1991.
- [4] Kisilowski J., Choromański W., Łopata H., *Investigation of Technical Stochastic Stability of Lateral Vibrations of Mathematical Model of Rail Vehicle*, Warsaw, Engineering Transactions, Polish Academy of Sciences – IPPT, Vol.33, 1985.
- [5] Kisilowski J., Kardas – Cinal E., *Some Problems Related to Investigation of Wheelset Model Stability*, Warszawa, Dynamical Problems in Mechanical Systems, PAN IPPT, 1991.
- [6] Zalewski J., *Modelowanie wpływu zaburzeń geometrii nadwozia na stateczność ruchu pojazdu samochodowego*, PhD thesis, Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, 2011.
- [7] Kardas-Cinal, E., *Badanie stateczności stochastycznej modelu matematycznego pojazdu szynowego*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1994.
- [8] Kisilowski J., Knothe K., *Advanced Railway Vehicle System Dynamics*, Warszawa, WNT 1991.