RYDYGIER Edward[1]
STRZYŻAKOWSKI Zygmunt [2]

Modelowanie problemów odwrotnych w diagnostyce toru kolejowego

Problemy odwrotne, równanie Poissona, metody numeryczne, aproksymacja, kontakt koło-szyna

Streszczenie

W diagnostyce toru istotnym zagadnieniem jest badanie skutków kontaktu koła pojazdu i szyny. Często z przyczyn technicznych nie jest możliwe uzyskanie pełnego zestawu danych pomiarowych użytecznych w ocenie deformacji szyny powstałych w wyniku oddziaływania pojazdu szynowego na tor i dlatego też modelowanie matematyczne wspomaga badania doświadczalne. Skutki kontaktu koła pojazdu i szyny można modelować sprowadzając badany układ do zagadnienia polowego układu 2-D i wyznaczając źródła pól. Jest to zagadnienie identyfikacji źródeł pola. W przypadku pól fizycznych opisanych niejednorodnym cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (równanie Poissona) można stosować efektywne metody numeryczne identyfikacji źródeł pól. Z tego względu, że w modelowaniu układów dynamicznych zagadnienie identyfikacji stanowi problem odwrotny zawierający się w klasie problemów niepoprawnie sformułowanych, uzyskane rozwiązania mogą być niestabilne. W pracy przestawiono szczegółowo różne użyteczne sposoby ustabilizowania wyników, o które muszą zostać uzupełnione metody numeryczne identyfikacji źródeł pól.

INVERSE PROBLEMS MODELLING IN DIAGNOSTICS OF THE RAILWAY TRACT

Abstract

In the diagnostics of the track an important issue is to study the effects of contact wheels and rails. Often, for technical reasons, it is impossible to obtain a complete set of measurement data useful in assessing the rail deformation caused by the impact of rail vehicle on the track and therefore the mathematical modeling supports experimental research. The effects of contact wheels and rails can be modelled by treatment of the studied system as a field issue of 2-D system and determining sources of the field. This is a matter of identifying sources of fields. In the case of physical fields described inhomogeneous partial differential equation of second order (Poisson equation) can be used efficient numerical methods for the identification of sources of fields. For this reason, that in the modelling of dynamical systems identification problem is the inverse problem in the class containing the incorrectly formulated problem, the obtained solutions may be unstable. In this paper various useful ways to stabilize the results which must be supplemented by numerical methods for the identification of sources of fields are described in detail.

1. WSTĘP

W diagnostyce toru istotnym zagadnieniem jest badanie skutków kontaktu koła pojazdu i szyny. Często z przyczyn technicznych nie jest możliwe uzyskanie pełnego zestawu danych pomiarowych użytecznych w ocenie deformacji szyny powstałych w wyniku oddziaływania pojazdu szynowego na tor i wówczas modelowanie matematyczne wspomaga badania doświadczalne. Skutki kontaktu koła pojazdu i szyny można modelować sprowadzając badany układ do zagadnienia polowego układu 2-D i następnie rozwiązując zadanie identyfikacji źródeł pola. Jest to zagadnienie identyfikacji źródeł pól, które w przypadku pól fizycznych opisanych niejednorodnymi cząstkowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu (równanie Poissona) można rozwiązać stosując efektywne metody numeryczne. Z tego względu, że w modelowaniu układów dynamicznych zagadnienie identyfikacji stanowi problem odwrotny zawierający się w klasie problemów niepoprawnie sformułowanych, uzyskane rozwiązania mogą być niestabilne. W pracy przestawiono różne użyteczne sposoby ustabilizowania wyników, o które muszą zostać uzupełnione metody numeryczne identyfikacji źródeł pól.

2. MODELOWANIE W DIAGNOSTYCE TORU
2.1 Opis badanego układu

Badany układ jest opisany równaniem Poissona ze znanymi warunkami brzegowymi, czyli wartościami $u|_\Gamma$ na brzegu Γ obszaru obejmowanego przez układ [5]

[1]Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki, 26-600 Radom, ul. Malczewskiego 29, Tel. +48 22 4438529, E-mail: erydygier@gmail.com
[2] Politechnika Radomska, Wydział Transportu i Elektrotechniki; 26-600 Radom; ul. Malczewskiego 29. Tel: + 48 48 361-77-15, E-mail: zstrz@data.pl

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{1}$$

gdzie: $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$,
$u = u(x, y) \in R^2$ – funkcja polowa,
$f = f(x, y) \in R^2$ – funkcja rozkładu źródeł (funkcja źródłowa).
Zadanie identyfikacji źródeł pola w przypadku układu opisanego równaniem różniczkowym (1) polega na wyznaczeniu funkcji źródłowej $f(x, y)$. Funkcję źródłową można wyznaczyć przy użyciu metod analitycznych, numerycznych lub analityczno-numerycznych. Metody analityczne są metodami ścisłymi, natomiast metody numeryczne zaliczają się do metod przybliżonych. Zaletami metod ścisłych są szybka zbieżność rozwiązań oraz nie stosowanie iteracji. Jednak metody ścisłe są efektywne w przypadku badania układów o prostych lub regularnych kształtach zbudowanych z materiałów o stałych własnościach termofizycznych. Dlatego też do rozwiązania równania różniczkowego (1) użyto metody numerycznej.

2.2 Metody rozwiązania zagadnienia identyfikacji

Metody numeryczne cechuje uniwersalność i odporność na zaburzenia. Cechy te wynikają z takich własności metod numerycznych, jak wykonywanie obliczeń w przypadku układów o złożonych kształtach i różnych rozmiarach, różnych warunków brzegowych, także w warunkach nieliniowości związanej z nieliniowością parametrów materiałowych, warunków brzegowych, źródeł pola, czy ze zmianą kształtu badanego układu. Podstawowymi metodami numerycznymi są: metoda różnic skończonych (MRS), metoda elementów skończonych (MES) i metoda elementów brzegowych (MEB). Metody te można traktować komplementarnie, tzn. przy rozwiązywaniu pewnych szczegółowych problemów jedna metoda może być bardziej efektywna od drugiej. Wszystkie metody numeryczne wymagają dyskretyzacji obszaru, w którym dany układ jest badany. Różnice między poszczególnymi metodami polegają na zastosowaniu różnych funkcji wagowych i różnej liczby procedur scalania obszaru z jego części. W metodzie różnic skończonych dyskretyzacji obszaru dokonuje się przez podział obszaru siatką z węzłami umożliwiającą zamianę zmiennych ciągłych w zmienne dyskretne, dopiero w zmiennych dyskretnych ciągłe równanie różniczkowe (1) zostaje zastąpione przybliżeniem dyskretnym za pomocą ilorazów różnicowych. Również warunki brzegowe wymagają przedstawienia w postaci różnicowej. Dla każdego węzła siatki można napisać jedno równanie różnicowe wiążące wartości funkcji w tym węźle z jego wartościami w węzłach sąsiednich i przez to równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych zostaje sprowadzone do układu równań algebraicznych. Liczba równań jest równa liczbie węzłów siatki podziału badanego obszaru i szybko rośnie wraz ze wzrostem liczby wymiarów przestrzeni. Prostota koncepcji aproksymacji w metodzie różnic skończonych polega na przedstawieniu pochodnych funkcji za pomocą odpowiedniej kombinacji skończonych szeregów Taylora [4].

Do rozwiązania układu (1) sposobem numerycznym wybrano metodę różnic skończonych, którą ulepszono na etapie konstrukcji układu równań algebraicznych przez wprowadzenie do procedury obliczeniowej rozwiązania specjalnych narzędzi obliczeniowych opartych na obiektach wziętych z analizy kombinatorycznej. Metodę tą nazwano Metodą Symulacyjną Identyfikacji [6]. Metoda ta została uzupełniona o specjalną procedurę stabilizacji wyników wykorzystującą procedury aproksymacyjne.

2.3 Stabilizacja wyników

Metody numeryczne służące do rozwiązania zagadnienia odwrotnego można podzielić stosując kryterium stabilizacji wyników, a nie rodzaju algorytmu użytego do rozwiązania układu równań. Stabilizację wyników zapewniają takie metody, jak: metoda specyfikacji funkcji, metoda regularyzacji, metoda kombinowana, schematy różnicowe (ang. *space-marching*), czy metody stochastyczne. Zapewnienie stabilności rozwiązania zagadnienia odwrotnego ma szczególne znaczenie przy stosowaniu metod przybliżonych. Problemy odwrotne modelowania zagadnień dynamicznych należą do klasy zadań niepoprawnie sformułowanych. Pojęcie poprawności sformułowania zadania wprowadził w początkach XX w. J. Hadamard, który postulował trzy własności dla poprawnie sformułowanych zadań: istnienie rozwiązania, jego jednoznaczność i stabilność [3]. Stabilność rozwiązania zadania oznacza, że zależy ono w sposób ciągły od danych, którymi zwykle są wielkości zmierzone i zazwyczaj obarczone błędami pomiarowymi. Jeśli istnieje operator odwrotny równania opisującego dany układ i jest on nieciągły, to wówczas uzyskane rozwiązanie jest niestabilne w odniesieniu do zmian danych pomiarowych, co oznacza, że rozwiązanie jest czułe na błędy pomiarowe. Często w otrzymanym rozwiązaniu występują znaczne oscylacje, mimo że nie pojawiają się w czasie przebiegu rzeczywistego zjawiska. Fizyczne podstawy tych oscylacji wynikają ze złego uwarunkowania zagadnienia odwrotnego, co objawia się procesach tzw. tłumienia i opóźnienia.

Spośród metod numerycznych rozwiązania problemów odwrotnych zapewniających stabilizację wyników, do najbardziej efektywnych należy metoda regularyzacji. Metoda ta ma wiele wariantów. Popularnymi i najbardziej ogólnymi sposobami regularyzacji są metoda Tichonowa i metoda iteracyjna [12]. Regularyzację można przeprowadzić także w inny sposób, a mianowicie przez wygładzenie danych i procedury aproksymacyjne.

3. STABILIZACJA WYNIKÓW ZA POMOCĄ PROCEDUR APROKSYMACYJNYCH

Stabilizacja przez wygładzanie danych pomiarowych i procedury aproksymacyjne stanowi rodzaj samoregularyzacji. Termin „samoregularyzacja" został wprowadzony przez Tichonowa – twórcę metody regularyzacji. Według Tichonowa wraz z wyznaczeniem różnych wielkości jako rozwiązań problemów odwrotnych związane jest użycie pewnego sposobu obliczeniowego zapewniającego stabilizację rozwiązań [12]. W ogólności stabilizację wyznaczanych wielkości można uzyskać przez odpowiedni dobór kroku czasowego albo stopnia wielomianu aproksymującego nieznaną funkcję. Te sposoby stabilizacji wyników są trudniejsze w przypadku rozwiązywania problemów odwrotnych niż dla problemów prostych. Przy prowadzeniu obliczeń numerycznych, gdzie stosuje się dyskretyzację przebiegów czasowych, stabilizacja jest zapewniona przez określenie górnej granicy kroku czasowego. Przy rozwiązywaniu problemów odwrotnych dla przebiegów czasowych przy wykorzystaniu danych pomiarowych zachodzi konieczność określenia także dolnej granicy kroku czasowego.

Dobór stopnia wielomianu aproksymującego wyznaczaną wielkość wiąże się z trudnościami i w pewnych przypadkach może nie być efektywna [1]. Zagadnienie eliminacji przypadkowych błędów pomiaru poprzez odpowiednią aproksymację zmierzonych przebiegów i rozkładu przestrzennego wyznaczonych wielkości ma duże znaczenie dla uzyskania znacznie dokładniejszego rozwiązania problemu odwrotnego, a także zapobiega pojawieniu się niestabilności rozwiązania. Dlatego też często już w metodzie aproksymacji stosowane są pewne sposoby regularyzujące obliczenia. W regularyzowanej aproksymacji przy użyciu metody najmniejszych kwadratów do dokonania najlepszego dopasowania, obliczenia są prowadzone w kierunku wyznaczenia krzywej nie tylko dobrze przybliżającej dane pomiarowe, ale również gładkiej [11]. Tego typu zalety posiada metoda interpolacji funkcjami sklejanymi (w jęz. ang. *spline interpolation*) używana do wygładzania wyników doświadczalnych, ale także stosowana w procedurach wstępnego przygotowywania danych. Metoda ta polega na podziale przedziału, w którym dokonywana jest interpolacja na kilka odcinków oraz na dokonywaniu interpolacji na kolejnych obszarach interpolowanej funkcji za pomocą wielomianów niskiego stopnia przy jednoczesnym zagwarantowaniu gładkości funkcji. Gładkość na przejściu między kolejnymi odcinkami jest zapewniona przez równość wartości funkcji i jej pochodnych na granicach odcinków. Dokładniej, zapewnienie gładkości funkcji sklejanej stopnia trzeciego polega na takim jej skonstruowaniu z wielomianów stopnia trzeciego, aby dwie pierwsze pochodne były ciągłe na całym przedziale, trzecia pochodna natomiast może mieć nieciągłości w punktach na styku odcinków, na które podzielony jest obszar badanej funkcji. Samą funkcję sklejaną można określić na podstawie następującej definicji [1]

> Niech $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$.
> Jeśli funkcja $s(x)$ spełnia następujące warunki:
> *a*) w każdym przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ... , m-1$, $s(x)$ jest wielomianem stopnia p,
> *b*) $s(x)$ i jej pierwsze $(p - 1)$ pochodnych są ciągłe na $[a, b]$,
> to $s(x)$ jest funkcją sklejaną stopnia p z węzłami w punktach x_i , $i = 0, 1, ... , m$.

Z powyższej definicji wynika, że funkcje sklejane tworzą przestrzeń liniową, gdyż dodanie dwóch funkcji sklejanych $s_1(x)$ i $s_2(x)$ o tych samych stopniach daje funkcję tego samego stopnia w postaci $c_1s_1(x) + c_2s_2(x)$.

Funkcje sklejane mogą być także użyte do interpolacji dwuwymiarowej powierzchni. Wówczas dla dwuwymiarowej prostokątnej siatki o węzłach w punktach (x_i, y_i), $i = 0, 1, ... , n$ można zdefiniować funkcję sklejaną (pierwszego stopnia) w postaci

$$s(x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} y_{i,j}\Psi_i(x)\Psi_j(y) \tag{2}$$

gdzie: Ψ – funkcje bazowe są określone następująco:

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} 0 & dla \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) & dla \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i) & dla \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}, \tag{3}$$

co powoduje, że

$$\Psi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}. \tag{4}$$

Dla dwuwymiarowej interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia stosuje się jako funkcje bazowe funkcje dzwonowe $B_i(x)$ posiadające następujące własności

$$B_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j\langle i-1 \quad \text{lub} \quad j\rangle i+1 \\ 1 & j = i \end{cases} \tag{5}$$

oraz $B'_i(x) = B_i''(x) = 0$ dla $x = x_{i-2}$ i $x = x_{i+2}$.

Spośród różnych metod interpolacyjnych stosowanych do wygładzania danych przez dopasowanie do nich dwuwymiarowej powierzchni, także metoda interpolacji używająca formułę odwrotności odległości ma własności regularyzujące i dlatego może być użyteczna w procedurach aproksymujących wykorzystywanych przy rozwiązywaniu problemów odwrotnych. Metoda odwrotności odległości (w jęz. ang. *inverse distance method*) jako metoda interpolacyjna została rozwinięta przez D. Sheparda w latach 60' XX w. i zastosowana do wygładzania nieregularnie rozłożonych danych występujących w meteorologii i geografii. Chociaż idea tej metody znana była już wcześniej (wykorzystywano ją przy obliczeniach średniej ważonej odwrotnościami odległości), wkład Sheparda jest znaczący, jeśli chodzi o opracowanie koncepcyjne, a także z historycznego punktu widzenia. Dlatego też w specjalistycznej literaturze metoda ta jest nazywana metodą Sheparda [2]. W przypadku dwuwymiarowej interpolacji metodą Sheparda, do zbioru danych dowolnie rozrzuconych w przestrzeni dopasowywana jest funkcja w postaci

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{F_i}{r_i^{\mu}}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{r_i^{\mu}}\right) & gdy \quad r_i \neq 0 \\ F_i & gdy \quad r_i = 0 \end{cases} \tag{6}$$

gdzie: $r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}$ – odległości w Euklidesowej przestrzeni metrycznej,

F_i – znane wartości w punktach o współrzędnych (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, N$, $0<\mu<\infty$.

Powyższa formuła może być przekształcona do postaci

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} F_i A_i(x, y) ., \tag{7}$$

gdzie

$$A_i(x,y) = \frac{\prod_{j=1, j\neq i}^{N} [r_j(x, y)]^{\mu}}{\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1, l\neq k}^{N} [r_l(x, y)]^{\mu}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{8}$$

oraz

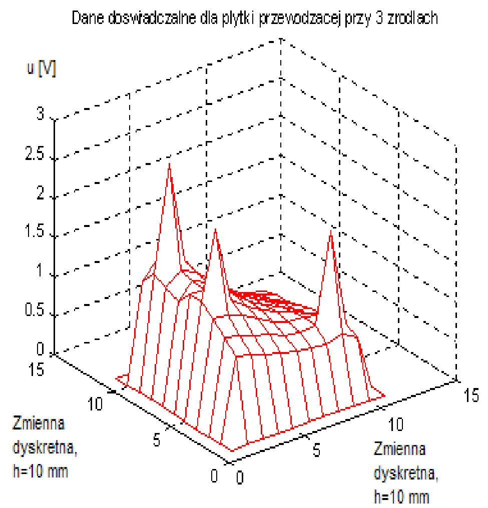
$$A_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \ldots, N. \tag{9}$$

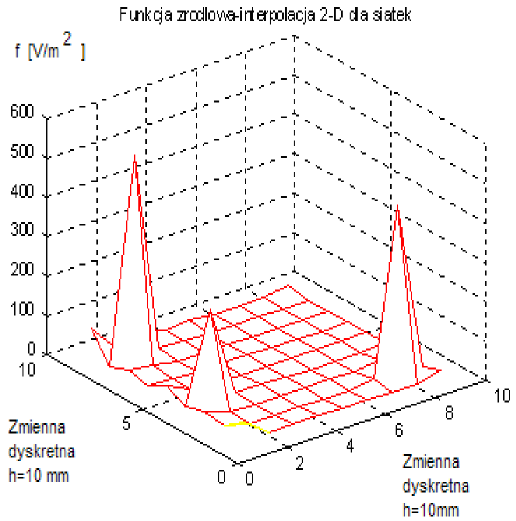
Dopasowywana funkcja w formie (7) jest bardziej stabilna numerycznie niż zapisana w oryginalnej formie (6). Można też określić formułę Sheparda jako ważoną średnią arytmetyczną. Zachowanie dopasowywanej funkcji $f(x, y)$ w sąsiedztwie punktów (x_i, y_j) zależy od wartości μ. Aby otrzymać gładkie powierzchnie, należy dobierać $1<\mu$. Z kolei dla względnie dużych μ dopasowywana powierzchnia staje się bardzo spłaszczona w pobliżu zadanych punktów i w konsekwencji powstają stromizny w punktach pośrednich. Eksperymentalnie znaleziono [2], że zadowalające rezultaty daje wybór $\mu = 2$. Metoda Sheparda ma w klasycznej wersji szereg ograniczeń. Dla dużych N wzrasta znacznie liczba operacji obliczeniowych prowadzących do dopasowania funkcji w postaci formuły Sheparda do zadanych punktów. Innym ograniczeniem jest wyznaczanie wag we wzorze (7) tylko w oparciu o odległości, bez uwzględnienia kierunków. W efekcie obliczeń można czasem otrzymać zaburzenie w otoczeniu punktów, do których jest dopasowywana powierzchnia opisana formułą Sheparda. Metoda interpolacji Sheparda jest ciągle rozwijana i udoskonalana. Podejmowane są badania teoretyczne nad coraz bardziej skomplikowanymi rozszerzeniami formuły Sheparda w celu dokładnego odtworzenia powierzchni opisanych wielomianami wysokich stopni.

Po wnikliwym przeanalizowaniu obliczeń na wielu przykładach oraz po przestudiowaniu zgromadzonej literatury dotyczącej udoskonaleń metody odwrotnej odległości w zastosowaniu do interpolacji danych doświadczalnych, wykorzystano jej własności regularyzacyjne do opracowania procedury stabilizacji wyników, którą włączono do algorytmów Symulacyjnej Metody Identyfikacji [6]. Opracowana metoda identyfikacji zastała zaimplementowana w postaci programu komputerowego INVERB w języku MATLAB. Użycie regularyzowanej procedury aproksymacyjnej w opracowanej metodzie identyfikacji jest korzystne dla zapewnienia stabilności wyników obliczeń, a ma także szereg zalet ułatwiających technikę obliczeń, jak np. to, że zadana na wejściu do programu komputerowego INVERB długość kroku dyskretyzacji badanego obszaru nie ulega zmianie w trakcie obliczeń, gdyż aproksymacja funkcji jest dokonywana tylko w tych punktach, w których zostały wyznaczone numerycznie wartości funkcji źródłowej. Zastosowanie procedur aproksymacyjnych do regularyzacji oprócz wyszczególnionych powyżej korzyści wiąże się jednak z pokonaniem pewnej trudności związanej z doborem czynnika skalującego [10].

4. WYNIKI

Własności stabilizacyjne opracowanej Metody Symulacyjnej Identyfikacji zostały zilustrowane na wykresach (rys. 1 i rys. 2). Na rys. 1 przedstawiono zastaw danych pomiarowych dla układu doświadczalnego, jaki stanowiła bardzo cienka (o grubości 0,07 mm) kwadratowa płytka przewodząca o wymiarach 100 x 100 mm^2 , na której dla zadanych prądowych wymuszeń punktowych dokonano pomiaru rozkładu potencjału (względem uziemionego brzegu) w węzłach kwadratowej siatki dyskretyzującej badany obszar. Krawędzie płytki ujęte w ramkę metalową uziemiono w celu uzyskania zerowych wartości brzegowych potencjału. Dane pomiarowe uzyskano dla różnej liczby, różnych położeń i wielkości intensywności źródeł tak, aby przetestować metodę symulacyjną identyfikacji źródeł dla różnych warunków, które mogą mieć miejsce w praktyce. Na rys. 1 przedstawiono dane pomiarowe uzyskane w przypadku trzech wymuszeń prądowych. Badana płytka przewodząca stanowiła fragment blachy ze stopu niklu typu „permaloy", stanowiącą materiał przewodzący prąd elektryczny o dobrych własnościach magnetycznych wymagający kosztowej technologii przy produkcji. Jest on stosowany do konstrukcji rdzeni przetwornic wysokiej częstotliwości, nawet do 20 kHz. Wyniki identyfikacji źródeł otrzymane za pomocą metody symulacyjnej identyfikacji zostały zilustrowane na rys. 2. Oceniając efekty obliczeń po uwzględnieniu w metodzie procedury stabilizacyjnej, rezultaty obliczeń uległy znacznej poprawie w porównaniu do wyników obliczeń dokonanych bez stosowania regularyzacji. Przestawiona na rys. 2 funkcja źródłowa ma wyraźne maksima, a tło zostało zredukowane prawie do zera, co znacznie ułatwia identyfikację źródeł.





Rys. 1. Dane pomiarowe przy 3 wymuszeniach prądowych *Rys. 2. Wyznaczona funkcja źródłowa*

W diagnostyce toru opracowana Metoda Symulacyjna Identyfikacji może znaleźć zastosowanie do badania zagadnień kontaktowych, w których pola fizyczne są opisane równaniem Poissona, tzn. do zagadnień cieplnych i wytrzymałościowych [7]. Takimi zagadnieniami kontaktowymi są skręcenie szyny kolejowej na skutek oddziaływania kół pojazdu na szynę, czy kontakt toczny koło-szyna. Stosując opracowaną metodę numeryczną identyfikacji źródeł pól dokonano identyfikacji parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej [9]. Natomiast odnośnie kontaktowych zagadnień cieplnych za pomocą opracowanej metody dokonano identyfikacji źródeł w śladzie cieplnym na powierzchni tocznej szyny wywołanym kontaktem tocznym koło-szyna [8].

5. WNIOSKI

Modelowanie zagadnień kontaktowych koło-szyna wspomaga diagnostykę toru kolejowego. Do badania skutków kontaktu koła pojazdu i szyny przydatne są metody identyfikacji źródeł pola, gdyż skutki kontaktu koła pojazdu i szyny można modelować sprowadzając badany układ do zagadnienia polowego układu 2-D i rozwiązując zadanie identyfikacji źródeł pól. W przypadku pól fizycznych opisanych niejednorodnym cząstkowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (równanie Poissona) można stosować efektywne metody numeryczne identyfikacji źródeł pól uzupełnione o procedury stabilizacji wyników. Zapewnienie stabilizacji wyników jest niezwykle istotne z tego względu, że w modelowaniu układów dynamicznych zagadnienie identyfikacji stanowi problem odwrotny zawierający się w klasie problemów niepoprawnie sformułowanych, dlatego uzyskane rozwiązania mogą być niestabilne. W pracy przestawiono szczegółowo różne użyteczne sposoby ustabilizowania wyników, o które muszą zostać uzupełnione metody numeryczne identyfikacji źródeł pól.

6. BIBLIOGRAFIA

[1] Davis P. J.: *Interpolation and Approximation*. N. Y., Blaisdell Publ. Co. 1963.
[2] Gordon W. J., Wixom J. A.: Shepard method of 'metric interpolation' to bivariate and multivariate interpolation. *Math. Comp.* 32, 141(1978)253-264.
[3] Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences*. Braunschweig/Wiebaden, Vieweg 1992.
[4] Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. Warszawa, PWN 1977.
[5] Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*, Warszawa, Wyd. N-T 1995.

[6] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna Intern. Conf. on Mathematical Modelling MATHMOD9*, Vienna, Feb. 2009, Vol. of Abstracts, Argesim Report No. 34, p. 451, Full Papers CD Volume, Argesim Report No. 35, Vienna University of Technology.

[7] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Efektywne metody modelowania użyteczne w eksploatacji pojazdów szynowych. *Logistyka* 2/2010, Dział **„**Logistyka-nauka" (artykuły recenzowane na płycie CD).

[8] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Modelowanie zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. *Logistyka* 3/2011, Dział „Logistyka-nauka" (artykuły recenzowane) na płycie CD.

[9] Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Modelowanie problemów odwrotnych w zagadnieniach transportu szynowego. *Logistyka* 6/2011, Dział „Logistyka-nauka" (artykuły recenzowane) na płycie CD.

[10] Rydygier E., Trzaska Z.: Application of special smoothing procedure to numerical solutions of inverse problems for real 2-D systems. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series* Vol. 216, N.Y., M. Dekker Inc. 2001, pp. 381-396.

[11] Schumaker L. L.: *Fitting surfaces to scattered data*, w *Approximation Theory II*. N.Y., Academic Press 1976.

[12] Tikhonov A. N., Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.: *Numerical Method for the Solution of Ill-posed Problems*. Dordrecht, Kluwer 1995.