

*drżania płyt, zmienny moduł Younga,  
podłoże sprężyste Winklera,  
ruchoma siła, ruch jednostajnie zmienny*

ATAMAN Magdalena<sup>1</sup>

### **DRGANIA PŁYTY ZAMOCOWANEJ NA OBWODZIE OBCIĄŻONEJ SIŁĄ SKUPIONĄ PORUSZAJĄCĄ SIĘ ZE ZMIENNĄ PRĘDKOŚCIĄ**

*W pracy przeanalizowano drżania prostokątnej płyty Kirchhoffa zamocowanej na obwodzie i spoczywającej na podłożu Winklera. Sprężysta płyta charakteryzuje się zmiennym poprzecznie modułem Younga. Obciążenie stanowi siła skupiona poruszająca się ruchem jednostajnie zmiennym, równoległe do boku płyty. Zaprezentowane rozwiązania oraz przykłady obliczeniowe opisują drżania wymuszone oraz drżania swobodne płyty.*

### **VIBRATIONS OF CLAMPED PLATE UNDER CONCENTRATED LOAD MOVING WITH VARIABLE VELOCITY**

*Vibrations of rectangular, clamped Kirchhoff's plate resting on Winkler foundation are analysed in the paper. Vertical variation of Young's modulus through the plate is considered. The supplementary modulus of elasticity is included into equation of motion. The plate is subjected to moving force. Velocity of load is variable. Forced and free vibrations of the plate are analysed. Solutions are illustrated by numerical examples.*

#### **1. WSTĘP**

Zagadnienie drgań belek i płyt na podłożach odkształcalnych pod wpływem obciążeń ruchomych ma szczególne znaczenie w analizie konstrukcji mostowych oraz nawierzchni drogowych, kolejowych i lotniskowych. Jednym z najważniejszych czynników jakie należy uwzględnić przy projektowaniu takich nawierzchni jest prędkość ruchomych pojazdów.

W literaturze przedmiotu można znaleźć wiele prac poświęconych ruchomym obciążeniom na belkach i płytach, między innymi [5-12]. Znaczna część prac poświęcona jest także modelowaniu konstrukcji inżynierskich, ruchomych pojazdów oraz ich wzajemnemu oddziaływaniu, na przykład [1-4], [13]. W dostępnej literaturze brak jest opracowań, w których rozważa się poprzecznie niejednorodną płytę zamocowaną na obwodzie, pod obciążeniem ruchomym poruszającym się ze zmienną prędkością.

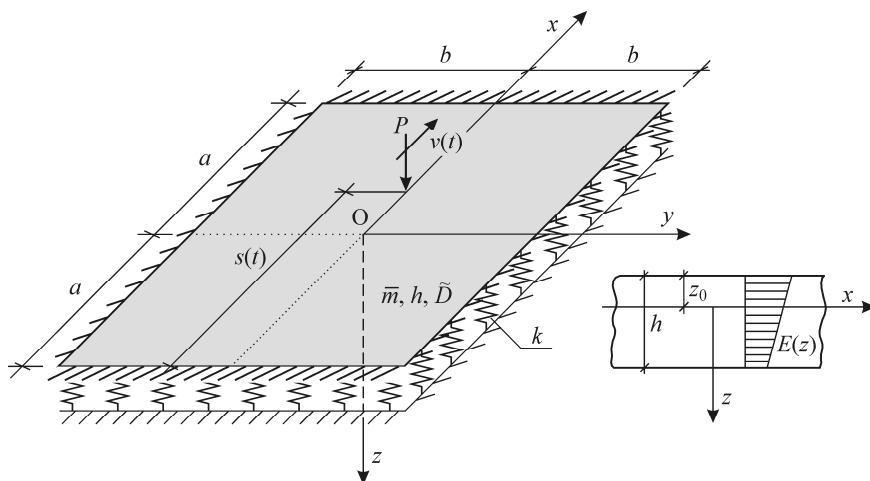
W referacie podjęto próbę analitycznego rozwiązania tego zadania.

---

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

## 2. RÓWNANIA RUCHU PŁYTY

Analizujemy sprężystą płytę Kirchhoffa o zmiennym poprzecznie module Younga, spoczywającą na podłożu Winklera, obciążoną ruchomą siłą  $P$ , przemieszczającą się wzdłuż osi  $x$  ze zmienną w czasie prędkością  $v(t) = v_0 + a_0 t$ . Przyjmujemy, że zamocowana na obwodzie płyta, zgodnie z rysunkiem 1, jest prostokątna o wymiarach w planie  $2a \times 2b$  i grubości  $h$ . Materiał płyty jest niejednorodny o module Younga zmieniającym się wzdłuż osi  $z$ .



Rys. 1. Schemat dynamiczny rozwiązywanego zadania

Równanie ruchu płyty pod obciążeniem dynamicznym  $p(x, y, t)$  w zapisie Galerkina ma następującą postać

$$\iint_A \left[ \tilde{D} \nabla^4 w(x, y, t) + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + k w(x, y, t) - p(x, y, t) \right] \delta w(x, y, t) dx dy = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $w = w(x, y, t)$  jest funkcją ugięcia płyty,

$$\tilde{D} = \frac{1}{1-\nu^2} \int_{-z_0}^{h-z_0} z^2 E(z) dz \text{ jest sztywnością płyty niejednorodnej na zginanie,}$$

$$\bar{m} = \rho h \text{ jest masą jednostki powierzchni płyty w } \text{kg/m}^2,$$

$$k \text{ jest współczynnikiem sprężystości podłoża wyrażonym w } \text{N/m}^3.$$

Przemieszczenia pionowe  $w$  odnosimy do powierzchni obojętnej płyty, która jest przesunięta w stosunku do powierzchni obojętnej płyty jednorodnej.

Wyrażając ugięcie płyty w postaci szeregu o rozdzielonych zmiennych

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^n q_m(t) w_m(x, y) \quad (2)$$

po prostych przekształceniach, otrzymamy układ  $n$  równań opisujących drgania płyty

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{m=1}^n \left[ L_{m,k} \frac{d^2 q_m(t)}{dt^2} + M_{m,k} q_m(t) + P_{m,k} q_m(t) \right] - N_k(t) \right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

W powyższych wzorach funkcje  $q_m(t)$  są uogólnionymi współzrędnymi Lagrange'a, natomiast funkcje  $w_m(x, y)$  muszą spełniać warunki brzegowe na obwodzie płyty.

Współczynniki  $L_{m,k}$ ,  $M_{m,k}$ ,  $P_{m,k}$  i  $N_k$  określone są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} L_{m,k} &= \bar{m} \iint_A w_m(x, y) w_k(x, y) dx dy, & M_{m,k} &= \tilde{D} \iint_A \nabla^4 [w_m(x, y)] w_k(x, y) dx dy, \\ P_{m,k} &= k \iint_A w_m(x, y) w_k(x, y) dx dy, & N_k(t) &= \iint_A p(x, y, t) w_k(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (4)$$

W przypadku drgań własnych płyty równania (3) redukują się do następującej postaci

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \left[ L_{m,k} \frac{d^2 q_m(t)}{dt^2} + M_{m,k} q_m(t) + P_{m,k} q_m(t) \right] = 0. \quad (5)$$

W celu rozwiązania zagadnienia drgań własnych płyty rozwiązanie równania (5) przyjmujemy w postaci następującej funkcji

$$w(x, y, t) = q_1(t) (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2, \quad (6)$$

spełniającej warunki brzegowe na obwodzie płyty:

$$\begin{aligned} x = \pm a, & \rightarrow w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ y = \pm b, & \rightarrow w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Przy założeniu (6) drgania własne płyty opisane są równaniem

$$\ddot{q}_1 + \omega_{1,1}^2 q_1 = 0, \quad (8)$$

gdzie  $\omega_{1,1}^2 = \frac{M_{1,1} + P_{1,1}}{L_{1,1}}$  jest kwadratem pierwszej częstości drgań własnych płyty.

Po podstawieniu do wzoru na  $\omega_{1,1}$  współczynników  $P_{1,1}$ ,  $M_{1,1}$  i  $L_{1,1}$  otrzymujemy częstość drgań własnych płyty określoną następującym wzorem

$$\omega_{1,1} = \sqrt{\frac{9\tilde{D}}{2\bar{m}a^4b^4}(7a^4 + 4a^2b^2 + 7b^4) + \frac{k}{\bar{m}}}. \quad (9)$$

W przypadku drgań wymuszonych równanie ruchu po uwzględnieniu (6) ma postać

$$\ddot{q}_1 + \omega_{1,1}^2 q_1 = \frac{N_1(t)}{L_{1,1}}. \quad (10)$$

Jeśli drgania płyty są wymuszone siłą  $P$  poruszającą się z prędkością  $v(t) = v_0 + a_0 t$  po osi  $x$ , to obciążenie  $p(x, y, t)$  działające na płytę zapisujemy w następujący sposób

$$p(x, y, t) = P \delta[x - s(t)] \delta(y - 0), \quad (11)$$

przy czym  $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ .

Zmienny w czasie współczynnik  $N_1(t)$  w rozważanym zadaniu wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \int_{-b}^b \left\{ \int_{-a}^a P \delta[x - s(t)] \delta(y - 0) w_1(x, y) dx \right\} dy = \\ &= P b^4 \left[ \left( v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right)^2 - a^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Ostatecznie równanie drgań wymuszonych płyty zapisujemy w postaci

$$\ddot{q}_1 + \omega_{1,1}^2 q_1 = \frac{99225}{65536} \frac{P}{\bar{m} a^9 b^5} \left[ \left( v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \right)^2 - a^2 \right]^2. \quad (13)$$

Wymiarem współrzędnej uogólnionej  $q_1$  w powyższym równaniu jest  $\left[\frac{1}{m^7}\right]$ .

Równanie (13) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym. Jego rozwiązanie jest sumą całki szczególnej i całki ogólnej. Ze względu na rozbudowaną formę nie będziemy przytaczać tego rozwiązania. Dwie stałe całkowania występujące w rozwiązaniu wyznaczamy zakładając zerowe warunki w chwili wjazdu siły na płytę

$$q_1(t)|_{t=t_0} = 0, \quad \left.\frac{dq_1(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 0. \quad (14)$$

Równanie (13) obowiązuje w przypadku kiedy siła  $P$  znajduje się na płycie, tzn. w przedziale czasu  $t \in \langle t_0; t_k \rangle$ . Po zjeździe obciążenia z płyty ( $t \geq t_k$ ) wykonuje ona drgania swobodne. Współrzędna uogólniona spełnia wówczas równanie

$$\tilde{q}_1(t) = A_1 \cos \omega_{1,1} t + B_1 \sin \omega_{1,1} t. \quad (15)$$

Stałe  $A_1$  i  $B_1$  wyznaczamy z warunków początkowych drgań swobodnych:

$$q_1(t)|_{t=t_k} = \tilde{q}_1(t)|_{t=t_k}, \quad \left.\frac{dq_1(t)}{dt}\right|_{t=t_k} = \left.\frac{d\tilde{q}_1(t)}{dt}\right|_{t=t_k}. \quad (16)$$

Ze względu na rozbudowaną formę rozwiązania równań opisujących drgania płyty nie będziemy ich przytaczać. Wyniki rozwiązania zadania przedstawimy w formie graficznej, zarówno w przypadku drgań wymuszonych jak i drgań swobodnych, w przykładzie obliczeniowym.

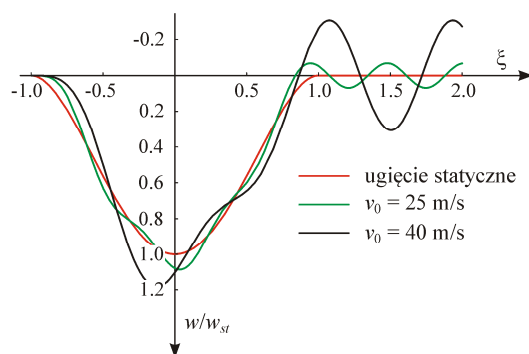
Przyjęte przez nas rozwiązanie (6) można uogólnić na większą liczbę składników wielomianów opisujących ugięcie płyty. Przypadek płyty jednorodnej utwierdzonej na obwodzie, obciążonej siłą poruszającą się ze stałą prędkością, przy  $m = 2$ , omówił np. Szcześniak w monografii [11].

### 3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

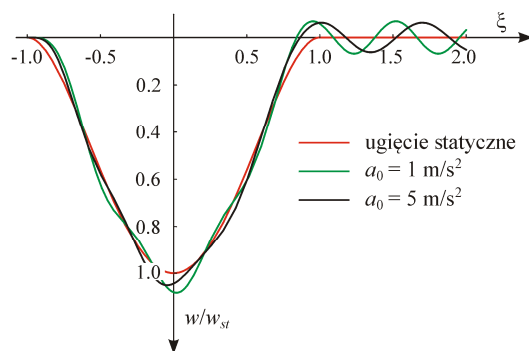
Ponieważ analizowany model płyty może opisywać warstwę lodu na zamrzniętych zbiornikach wodnych [14], w przykładzie obliczeniowym przyjęto charakterystyki materiałowe i geometryczne pokrywy lodowej w pobliżu wyspy Tent, w Cieśninie McMurdo na Antarktydzie. Bazując na pracy Squire'a i in. [14] przyjęto współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ , grubość płyty  $H = 1,6$  m, oraz  $z_0 = 0,79$  m (odległość osi obojętnej od górnej powierzchni płyty). Sztywność płyty na zginanie jest równa  $\tilde{D} = 1,3$  GNm. Gęstość wody morskiej wynosi  $\rho_w = 1025$  kg/m<sup>3</sup>, a gęstość lodu  $\rho_l = 922,5$  kg/m<sup>3</sup>. Charakterystyka sprężysta podłoża w analizowanym modelu pływającej płyty lodowej zależy od gęstości wody i jest równa  $k = \rho_w g$ , przy czym  $g$  jest przyspieszeniem

ziemskim. Obciążenie płyty stanowi siła skupiona o wartości  $P = 57,5$  kN poruszająca się ruchem jednostajnie zmiennym. Do obliczeń przyjęto płytę kwadratową o długości boku 30 m.

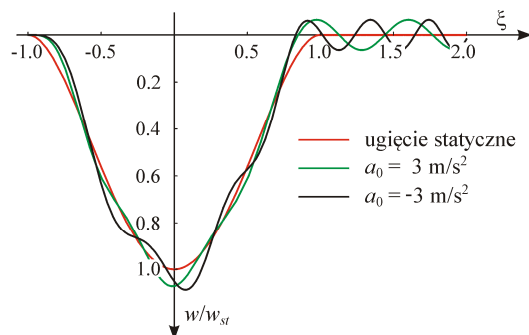
W przykładzie obliczeniowym przeanalizowano wpływ prędkości oraz przyspieszenia na ugięcia płyty. Wyniki przedstawiono we współrzędnych bezwymiarowych. Współrzędna  $\xi$  na osi poziomej opisuje położenie siły, natomiast na osi rzędnych odłożono bezwymiarowe ugięcia punktu środkowego płyty  $w/w_{st}$ . Wielkość  $w_{st}$  jest ugięciem statycznym środka analizowanej płyty wywołanym siłą ustawioną w tym punkcie. Na przedstawionych poniżej rysunkach zaobserwować można drgania środka płyty w czasie przejazdu obciążenia po płycie, czyli przy  $\xi \in \langle -1; 1 \rangle$  oraz drgania swobodne po zjeździe ruchomej siły z płyty ( $\xi \geq 1$ ). Obliczenia wykonano przy pomocy programu Mathematica.



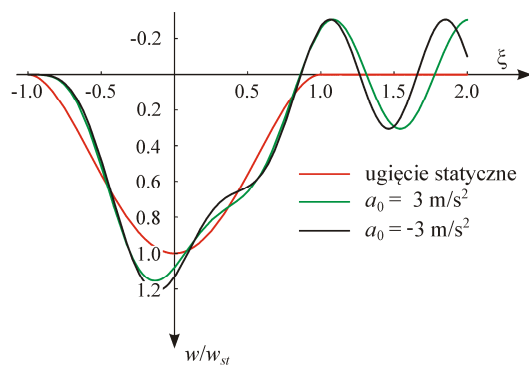
Rys. 2 Wpływ prędkości ruchomej siły na ugięcia środka płyty przy  $a_0 = 0$  m/s<sup>2</sup>



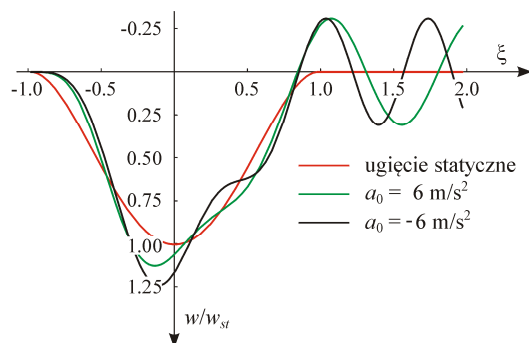
Rys. 3. Dynamiczne ugięcia środka płyty przy prędkości początkowej siły  $v_0 = 25$  m/s oraz różnych wartościach przyspieszenia  $a_0$



Rys. 4. Dynamiczne ugięcie środka płyty wymuszone siłą poruszającą się ruchem jednostajnie przyspieszonym i jednostajnie opóźnionym przy  $v_0 = 25$  m/s



Rys. 5. Dynamiczne ugięcie środka płyty wymuszone siłą poruszającą się ruchem jednostajnie przyspieszonym i jednostajnie opóźnionym przy  $v_0 = 40$  m/s



Rys. 6. Dynamiczne ugięcie środka płyty wymuszone siłą poruszającą się ruchem jednostajnie przyspieszonym i jednostajnie opóźnionym przy  $v_0 = 40$  m/s

#### 4. WNIOSKI

Z przeprowadzonej analizy wynika, że prędkość ruchomej siły ma istotny wpływ na ugięcia płyty zamocowanej na obwodzie. Przy prędkości wjazdu obciążenia  $v_0 = 40$  m/s maksymalne przeciążenie dynamiczne osiąga 20% (rys. 2). W analizowanym zakresie przyspieszeń, występującym w rzeczywistych pojazdach, wpływ ruchu jednostajnie opóźnionego na odpowiedź dynamiczną konstrukcji jest nieznacznie większy od wpływu ruchu jednostajnie przyspieszonego.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Frýba, L.: *Vibration of solids and structures under moving loads*, Thomas Telford, 1999.
- [2] Frýba, L.: *Dynamics of railway bridges*, Thomas Telford, London 1996.
- [3] Cebon D.: *Handbook of vehicle-road interaction*, Swets & Zeitlinger Publishers, Lisse, the Netherlands 2000.
- [4] Yang, Y. B., Yau, J. D., Wu, Y. S.: *Vehicle-bridge interaction dynamics with applications to high-speed railway*, World Scientific, Singapore 2004.
- [5] Bogacz R., Krzyżyński T., Popp K.: *On the group-phase velocity relations for continuous system under moving loads*, ZAMM, 70, 4, 1990, pp. 202-203.
- [6] Bogacz R., Nowakowski S.: *On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving spring-mass system*, Acta Mechanica, 61 1986 pp. 117-127.
- [7] Bogacz R., Rozenbajgier Z.: *Stacjonarne drgania belki spoczywającej na półprzestrzeni lepko-sprężystej wywołane ruchomym obciążeniem*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej. Mechanika, z. 63, Warszawa 1979, str. 45-70.
- [8] Szcześniak W.: *Problemy ruchomych obciążeń w Polsce. Przegląd podstawowych pozycji literatury*, Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian Transactions, OW PW, Warszawa 1993, str. 191-198.
- [9] Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia dynamiki płyt poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 119, OWPW, Warszawa 1992.
- [10] Szcześniak W.: *Inercyjne obciążenia ruchome na belkach i płytach*, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, z. 112, OW PW, Warszawa 1990.
- [11] Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*, OWPW, Warszawa 2000.
- [12] Gardzińska R.: *Analiza przemieszczeń płyty Kirchhoffa wywołanych złożonym obciążeniem inercyjnym w ruchu jednostajnie zmiennym*, III Ukrainian-Polish Seminar „Theoretical Foundations in Civil Engineering”. OWPW, Warszawa 1995, str. 195-204.
- [13] Strzyżakowski Z.: *Modelowanie zjawisk dynamicznych w układach transportowych*, Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji – Państwowy Instytut Badawczy, Radom 2007.
- [14] Squire V.A., Robinson W.H., Langhorne P.J., Haskell T.G.: *Vehicles and aircraft on floating ice*, Nature 333, London 1988, pp. 159-161.