*Pole akustyczne, harmoniczne źródło wibroakustyczne, analiza modalna, amplitudy modalne, optymalizacja wielokryterialna, algorytm genetyczny, selekcja, krzyżowanie, mutacje, rozwiązania Patero-optymalne*

BŁAŻEJEWSKI Andrzej[1]

# OPTYMALIZACJA IMPEDANCYJNYCH WARUNKÓW BRZEGOWYCH OBSZARU Z HARMONICZNYM ZABURZENIEM WIBROAKUSTYCZNYM

*Zaprezentowano problem optymalizacji rozmieszczenia porowatego materiału absorbującego o zespolonej impedancji akustycznej na brzegach obszaru, w którym umieszczone zostało harmoniczne źródło wibroakustyczne [1] . Do opisu rozkładu ciśnienia akustycznego zastosowano analizę modalną z uwzględnieniem sprzężenia między modami. Wtedy ciśnienie akustyczne w każdym punkcie może być przedstawione w postaci sumy iloczynów funkcji własnych oraz składowych czasowych tj. amplitud modalnych [6], które wykorzystano do zdefiniowania wielokryterialnej funkcji celu. Jako zmienne decyzyjne wybrano wartości impedancji materiału na poszczególnych brzegach pomieszczenia. Do poszukiwania rozwiązań niezdominowanych, wykorzystano algorytm genetyczny [5]. W rezultacie otrzymano zestaw rozwiązań Pareto-optymalnych.*

# OPTIMIZATION OF IMPEDANCE BOUNDARY CONDITIONS INTO AN ENCLOSURE WITH HARMONIC VIBROACOUSTICAL SOURCE

*The optimization of a porous material distribution on boundaries of an enclosure with vibroacoustical source has been presented [1]. The material impedance has been characterized complex number. In order to describe acoustic field generated by the source modal analysis assumption has been used. The mode coupling in the model of the field has been considered. According to modal analysis, acoustic pressure in each point of enclosure can be represented by the sum of eigenfunctions and special time component i.e. modal amplitudes products [6]. The amplitudes have been used to define multi-objective function. Values of boundary impedances as design variables have been assumed. The genetic algorithm has been applied in order to select non-dominated solutions [5]. As the result Pareto optimal solutions have been determined.*

## 1. WSTĘP- OPIS BADANEGO PROBLEMU

W praktyce często można zetknąć się z sytuacją, kiedy w pewnym pomieszczeniu (obszarze zamkniętym) usytuowane jest urządzenie, maszyna lub inny obiekt drgający (źródło), emitujące falę wibroakustyczną. Często źródło to charakteryzuje się tym, że w widmie emitowanej fali dominuje jedna częstotliwość, której odpowiada zdecydowana większość energii akustycznej zaburzenia. Jednocześnie źródła wibroakustyczne

[1]Politechnika Koszalińska, Instytut Mechatroniki, Nanotechnologii i Techniki Próżniowej, 75-453 Koszalin, ul. Śniadeckich 2. Tel.: +48 94-34-86-541, Fax: +48 94-34-04-021, E-mail: andrzej.blazejewski@tu.koszalin.pl

charakteryzują się widmem, które można rozpatrywać z ograniczeniem do niskich częstotliwości. Oznacza to, że długość emitowanej fali jest o wiele większa od wymiarów źródła i można w przybliżeniu uznać je za punktowe [1]. Generowane zaburzenie przenosi się do otoczenia i wchodząc w interakcję z powierzchniami ograniczającymi rozpatrywany obszar (odbicie, interferencja, absorpcja) tworzy swoisty stan ośrodka, czyli pole akustyczne, opisane wartościami ciśnienia w określonych chwilach i punktach obszaru. Jeżeli emisja zaburzenia powodowanego przez źródło trwa odpowiednio długo, to w rezultacie mamy do czynienie ze stanem ustalonym pola akustycznego. W wielu sytuacjach pole to może mieć szkodliwy wpływ na środowisko i przede wszystkim na człowieka znajdującego się w jego zasięgu. Dąży się do redukcji takich oddziaływań, na przykład poprzez zwiększenie absorpcji fali akustycznej padającej na powierzchnie brzegowe obszaru. W związku z tym postawiono pytanie: „Jak rozmieścić materiał absorbujący aby uzyskać najlepszy efekt przy minimalnych kosztach?”

## 2. MODEL MATEMATYCZNY

### 2.1 Opis pola akustycznego przy wykorzystaniu rozwinięcia modalnego

Opisany powyżej model fizyczny można zamodelować jako obszar przestrzeni V (dodatnio zorientowany) ograniczony powierzchniami S o określonych warunkach brzegowych, ze źródłem wibroakustycznym [1] o mocy (wydatku) f usytuowanym w określonym miejscu $r(x_0,y_0,z_0)$ tego obszaru. Pole akustyczne wygenerowane w tym obszarze opisuje niejednorodne równanie falowe określające wartości ciśnienia akustycznego p(r,t) w każdym punkcie obszaru i w czasie.

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = f \qquad (1)$$

W równaniu (1) c to prędkość propagacji fali akustycznej w powietrzu, f funkcja definiująca moc lub wydatek źródła oraz jego położenie, a symbol $\Delta \equiv \nabla^2$. Wewnątrz obszaru na powierzchni S istnieją znane warunki brzegowe w postaci:

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{Z}\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (2)$$

gdzie Z to wartości powierzchniowej impedancji akustycznej, $\partial p/\partial n$ oznacza gradient ciśnienia akustycznego w kierunku prostopadłym do powierzchni brzegowych, a ρ gęstość powietrza. Założono, że warunki brzegowe (2) w danym punkcie zależne są jedynie od prostopadłych reakcji. Pominięto lepko-sprężyste oddziaływanie styczne ośrodka propagacji oraz powierzchni brzegowych.

Zgodnie z założeniami analizy modalnej, obszar zamknięty V można rozpatrywać, jako układ rezonansowy o charakterystycznych modach akustycznych i skorelowanych z nimi częstotliwościach własnych. Wtedy rozwiązaniem równania falowego (1) jest suma iloczynów funkcji własnych $\Psi_m(r)$ oraz odpowiadających im składowych czasowych $T_m(t)$ w postaci:

$$p(r,t) = \sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} T_m(t)\Psi_m(r) \qquad (3)$$

Założono, że funkcje własne $\Psi_m(r)$ spełniają w rozpatrywanym obszarze równanie Helmholtz'a w postaci:

$$\Delta\Psi_n(r) + \lambda_n \Psi_n(r) = 0 \tag{4}$$

przy warunkach brzegowych:

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial n} = 0 \tag{5}$$

W zależności (4) $\lambda_n$ to wartości własne skorelowane z częstotliwościami własnymi $\omega_n$ obszaru V ($\omega^2_n = \lambda_n c^2$). Obie funkcje (1) oraz (4), w obszarze zamkniętym V dodatnio zorientowanym, powinny spełniać zgodnie z teorią Greena następujące równanie:

$$\int_V (p\Delta\Psi_n - \Psi_n \Delta p)dV = \int_S (p\frac{\partial \Psi_n}{\partial n} - \Psi_n \frac{\partial p}{\partial n})dS \tag{6}$$

Wykorzystując odpowiednio przekształcone zależności (1) i (4) i następnie implementując je po lewej stronie (6) oraz zależności (2) i (5) po prawej stronie równania (6) otrzymujemy:

$$\int_V (-\lambda_n p\Psi_n - \Psi_n \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Psi_n f)dV = \int_S \frac{\rho_0}{Z}\Psi_n \frac{\partial p}{\partial t} dS \tag{7}$$

Znając założenie (3) określające postać rozwiązania równania falowego (1) można zapisać następujące pochodne:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} \ddot{T}_m(t)\Psi_m(r) \text{ oraz } \frac{\partial p}{\partial t} = \sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} \dot{T}_m(t)\Psi_m(r) \tag{8}$$

Podstawiając pochodne (8) do (7) otrzymano następującą zależność:

$$\int_V (-\lambda_n \sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} T_m\Psi_m - \frac{1}{c^2}\sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} \ddot{T}_m\Psi_m - f)\Psi_n dV = \int_S \frac{\rho_0}{Z}\sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} \dot{T}_m\Psi_m\Psi_n dS \tag{9}$$

Jednocześnie funkcje własne uzyskane z rozwiązania równań (4) muszą być ortogonalne oraz unormowane w następujący sposób:

$$\int_V \Psi_n\Psi_m dV = \begin{cases} 0 \; n \neq m \\ 1 \; n = m \end{cases} \tag{10}$$

Prowadzi to do modyfikacji i uproszczenia zależności (9) do postaci:

$$-\lambda_n \sqrt{V} T_n - \frac{1}{c^2}\sqrt{V}\ddot{T}_n - \int_V f\Psi_n dV = \rho_0 \sqrt{V}\sum_{m=0}^{\infty} \dot{T}_m \int_S \frac{\Psi_m\Psi_n}{Z} dS \tag{11}$$

Po uporządkowaniu zależności (11) otrzymano układ równań zwyczajnych:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n + \rho_0 c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \dot{T}_m \int_S \frac{\Psi_m\Psi_n}{Z} ds = \frac{c^2}{\sqrt{V}}\int_V f\Psi_n dV \tag{12}$$

z którego można wyznaczyć składowe czasowe $T_n(t)$ odpowiadające kolejnym funkcjom własnym $\Psi_n(r)$.

Jeżeli założono, że źródło dźwięku ma charakter harmoniczny w postaci $f=f_\omega e^{j\omega t}$, to również składowe czasowe muszą być w postaci harmonicznej tj. $T_n=A_n e^{j\omega t}$. Czynniki $A_n$

nazwano amplitudami modalnymi. Kolejne założenie o wymiarach źródła w stosunku do długości emitowanej fali i uznaniu go za punktowe, usytuowane w $r_0(x_0,y_0,z_0)$ prowadzi do modyfikacji wyrażenia (12) i po pominięciu czynnika eksponencjalnego można je zapisać w prostszej postaci:

$$\omega_n^2 A_n - \omega^2 A_n + j\omega\rho_0 c^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_S \frac{\Psi_m \Psi_n}{Z} ds = \frac{c^2}{\sqrt{V}} f_\omega \Psi_{n0} \tag{13}$$

gdzie $\Psi_{n0} = \Psi_n(r_0)$ oznacza wartość funkcji własnej w punkcie usytuowania źródła $r_0(x_0,y_0,z_0)$. Wyrażenie:

$$r_{mn} = 0{,}5\rho_0 c^2 \int_S \frac{\Psi_m \Psi_n}{Z} ds \tag{14}$$

nazwano współczynnikiem tłumienia obszaru powodowanego przez impedancyjne warunki brzegowe (2). Implementując zależność (14) do równania (13) oraz uwzględniając to, że suma $\Sigma A_m$ zawiera również czynnik związany z amplitudą modalną $A_n$ w postaci:

$$2 j\omega r_{nn} A_n = j\omega\rho_0 c^2 A_n \int_S \frac{\Psi_n \Psi_n}{Z} ds \tag{15}$$

Ostatecznie uwzględniając (14) oraz (15) w zależności (12), można ją przedstawić następująco:

$$\omega_n^2 A_n - \omega^2 A_n + 2 j\omega r_{nn} A_n + 2 j\omega \delta_{mn} \sum_{m=0}^{\infty} r_{mn} A_m = \frac{c^2}{\sqrt{V}} f_\omega \Psi_{n0} \tag{16}$$

Parametr $\delta_{mn}$=1 przy m≠n oraz $\delta_{mn}$= 0 przy n=m. Z powyższej zależności algebraicznej (16) łatwo wyznaczyć wartości amplitud modalnych $A_n$ postaci:

$$A_n = \frac{\frac{c^2}{\sqrt{V}} f_\omega \Psi_{n0} - 2 j\omega \delta_{mn} \sum_{m=0}^{\infty} r_{mn} A_m}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2 j\omega r_{nn}} \tag{17}$$

Każdej z amplitud odpowiada funkcja własna $\Psi_n$ oraz częstotliwość własna $\omega_n$.

Zatem wyznaczenie rozkładu ciśnienia akustycznego p wewnątrz obszaru zamkniętego V ze źródłem harmonicznym o częstotliwości ω, danej mocy lub wydatku, któremu odpowiada wartość $f_\omega$, sprowadza się do rozwiązania problemu własnego (4), wyznaczenia wartości funkcji własnych $\Psi_n$ oraz częstotliwości własnych $\omega_n$, które posłużą do obliczenia wartości amplitud modalnych (17). Znając wartości funkcji i częstotliwości własnych oraz amplitud modalnych danego obszaru można badać rozkład ciśnienia przy różnej konfiguracji impedancji powierzchniowej Z oraz usytuowaniu i częstotliwości źródła.

### 2.2. Wartości amplitud modalnych a impedancja zespolona

Z powyższych rozważań wynika, iż impedancyjne warunki brzegowe mają wpływ na kształt i wartości ciśnienia pola akustycznego wewnątrz obszaru poprzez współczynnik (14) i (15), co skutkuje modyfikacją wartości amplitud modalnych. Na podstawie analizy zależności (17) można stwierdzić, że zespolona impedancja powierzchniowa Z wpływa na wartości amplitud modalnych w sposób nieliniowy, trudny do określenia, zależny zarówno od wartości oraz stosunku części rzeczywistej impedancji do urojonej oraz jej usytuowania w obszarze na danej powierzchni S. Wynika to z zależności (14) i (15), w których wyrażenie podcałkowe zawiera wartości odpowiednich funkcji na tychże powierzchniach.

**2.3 Wartości amplitud modalnych i kryterium oceny pola akustycznego**

Aby scharakteryzować właściwości pola akustycznego wewnątrz obszaru zamkniętego można zastosować wartość energii akustycznej w nim zgromadzonej. Ze względu na rozpatrywany stan ustalony pola, uwzględnić wystarczy potencjalną energię akustyczną, która jest proporcjonalna do kwadratu ciśnienia akustycznego. Oszacowania poziomu tej energii można dokonać wyznaczając średniokwadratową wartość ciśnienia akustycznego $p_{rms}$ w całym obszarze V zgodnie z zależnością:

$$p_{rms} = \sqrt{\int_V \frac{p^2}{V} dV} \tag{18}$$

Wykorzystując sformułowanie (3) przy $T_m=A_m e^{j\omega t}$ oraz ortogonalność funkcji własnych (10), w stanie ustalonym (18) przyjmuje prostą do obliczeń postać:

$$p_{rms} = \sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} A_m^2} \tag{19}$$

**3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACJI**

**3.1 Wnioski wynikające analizy z modelu matematycznego**

Wartości amplitud (17) można modyfikować poprzez odpowiednią konfigurację warunków brzegowych, co związane jest z odpowiednim rozkładem impedancji. Należy znaleźć optymalny rozkład impedancji akustycznej na wybranych powierzchniach S obszaru V ze względu na dwa kryteria: kryterium akustyczne opisane zależnością (19) oraz uogólnione kryterium kosztów, związane z ilością zastosowanego materiału absorpcyjnego. Oba kryteria jednocześnie należy minimalizować.

Wynika z tego, że problem optymalizacji obejmuje kryteria przeciwstawne i jest przypadkiem optymalizacji wielokryterialnej [5] (w tym przypadku dwukryterialnej).

**3.2 Zmienne decyzyjne $Z_i$**

$Z_i$ to wartości impedancji przypisane i-tej powierzchni S obszaru zamkniętego V. Liczba zmiennych decyzyjnych zależy od podziału powierzchni brzegowych na elementy, na których impedancja akustyczna może przyjmować różne wartości. Podział ten może wynikać z kształtu obszaru. W przypadku np. pomieszczeń mogą to być: ściany, sufit, podłoga, co nie wyklucza dodatkowego podziału na tych elementach. Zwiększa to jednak jednocześnie liczbę zmiennych decyzyjnych.

Jako materiał absorbujący o powierzchniowej zespolonej impedancji akustycznej, najczęściej wykorzystywany jest materiał porowaty charakteryzujący się pewną opornością właściwą przepływu powietrza $R_f$. Istnieje wiele rodzajów materiałów porowatych, o zróżnicowanej strukturze, których właściwości absorpcyjne wynikają z rodzaju szkieletu (np. wełna mineralna, włókno szklane, pianka porowata) oraz procesów zachodzących w porach [3, 4, 9]. W celu wyznaczenia wartości impedancji właściwej $Z_C$ oraz liczby falowej

$k_C$ porowatego materiału absorpcyjnego o znanej oporności przepływu powietrza $R_f$, zastosowano model empiryczny Delany-Bazley'a w postaci [2]:

$$Z_C = Z_a \cdot \left[ 1 + 0.0571 \cdot \left( \frac{\rho \cdot f}{R_f} \right)^{-0.754} - j \cdot 0.087 \cdot \left( \frac{\rho \cdot f}{R_f} \right)^{-0.732} \right]$$

$$k_C = \frac{\omega}{c} \cdot \left[ 1 + 0.0978 \cdot \left( \frac{\rho \cdot f}{R_f} \right)^{-0.7} - j \cdot 0.189 \cdot \left( \frac{\rho \cdot f}{R_f} \right)^{-0.595} \right] \tag{20}$$

gdzie $Z_a = \rho_0 c$ to impedancja właściwa powietrza a ρ gęstość materiału porowatego. Gdy materiał o grubości warstwy d pokrywa powierzchnie, które można uznać za doskonale sztywne, poszukiwana wartość impedancji powierzchniowej takiego układu opisana jest zależnością:

$$Z = Z_C ctgh(jk_C d) \tag{21}$$

W związku z powyższym zmienne decyzyjne przyjmują ostatecznie postać $Z_i$=Z(d).

### 3.3 Funkcja celu F($Z_i$)

Funkcję celu zdefiniowano w następującej formie:

$$\min_{Z_i(d)} F\{Z_i(d)\} = [p_{rms}, f_{koszt}]^T$$
$$Z_i(d) - Z_{\max} \leq 0 \wedge Z_{\min} - Z_i(d) \leq 0, i = 1,2,3,...N \tag{22}$$

gdzie wielkość $p_{rms}$ opisana jest zależnością (19), wielkość $f_{koszt}$ definiuje koszt - nakład, który należy ponieść, żeby osiągnąć określony efekt $p_{rms}$. Wartości drugiego kryterium ($f_{koszt}$), rosną wraz z ilością zużytych materiałów oraz wzrostem ich właściwości absorpcyjnych, czyli wraz z grubością warstwy d na i-tej powierzchni. Aby minimalizować to kryterium pożądane jest pokrywanie jak najmniejszych powierzchni o małej grubości materiału d. W związku z powyższym kryterium to zdefiniowano w następujący sposób:

$$f_{koszt} = \sum_i^N [Z_{\max}(d=0) - Z_i(d)] w_i \tag{23}$$

gdzie $Z_{max}$ górna granica zakresu rozpatrywanych wartości impedancji tj. przy grubości warstwy materiału absorpcyjnego na powierzchni d=0 (powierzchnia niemodyfikowana akustycznie, pozbawiona materiału), N to liczba zmiennych decyzyjnych (liczba powierzchni o określonej impedancji $Z_i$). Wagi $w_i$ są proporcjonalne do wielkości powierzchni o impedancji $Z_i$(d).

### 3.4 Założenia, ograniczenia i uproszczenia

Założenia obowiązujące przy formułowaniu modelu matematycznego pola akustycznego generowanego w obszarze zamkniętym, prawdziwe są również przy rozwiązywaniu problemu optymalizacji tzn.:

- częstotliwość wymuszenia mieści się w zakresie, w którym długość fali w porównaniu z wymiarami źródła pozwala uznać je za źródło punktowe,
- położenie, wydatek (moc) oraz częstotliwość źródła dźwięku są stałe,
- rozpatrywany jest stan ustalony pola akustycznego.

Ze względu na możliwość stosowania materiału absorpcyjnego tylko o określonych grubościach d, ograniczenia zostały narzucone na zakres impedancji powierzchniowej. Zakres wartości zmiennych decyzyjnych przedstawia się następująco: $Z_{min}=Z(d_{max})$ oraz $Z_{max}=Z(d_{min})$. Gdy założyć $d_{min}=0$, wtedy górna granica wartości zmiennych decyzyjnych odpowiada impedancji powierzchni niemodyfikowanych akustycznie.

Kolejne ograniczenie wiąże się z koniecznym uproszczeniem związanym z możliwością wyznaczenia skończonej liczby funkcji własnych. Przy obliczaniu wartości kryterium $p_{rms}$ funkcji celu, w rzeczywistości występować będzie ograniczona liczba modów, podczas gdy z zależności (3) wynika, że ciśnienie akustyczne jest sumą iloczynów amplitud modalnych i funkcji własnych w przypadku wszystkich modów obszaru, tworząc szereg nieskończony. Przy wymuszeniu harmonicznym z zależności (17) wynika jednocześnie, że wartości amplitud modalnych dla częstotliwości własnych leżących ,,daleko” od częstotliwości wymuszenia, dla których różnica $\omega_n$ - $\omega$ przyjmuje bardzo duże wartości, dążą do zera. Zatem częstotliwości wymuszenia muszą być ograniczone do zakresu, w którym amplitudy modalne leżące blisko górnej granicy zakresu rozpatrywanych częstotliwości własnych dążą do zera i maja nieistotny wpływ na wartości ciśnienia akustycznego. Uproszczenie, które ogranicza liczbę modów branych pod uwagę i nie powoduje istotnych błędów, wymusza określenie dopuszczalnej wartości częstotliwości źródła. Ta granica może być łatwo wyznaczona w zakresie niskich częstotliwości, szczególnie poniżej tzw. częstotliwości granicznej Schroedera [12]. Tu mamy do czynienia z ,,rzadkim” rozmieszczeniem modów, umożliwiającym wyznaczenie tej granicy oraz ze zjawiskami ,,czysto” falowymi pola akustycznego co sprawia, że równanie falowe (1) w tym zakresie jest w pełni uzasadnione jako model zjawisk akustycznych.

## 4. METODA OPTYMALIZACJI-ALGORYTM GENETYCZNY

Problem optymalizacji wielokryterialnej, w którym funkcja celu $F(Z_i)$ ma nieznany, trudny do określenia charakter, z możliwością występowania wielu ekstremów ze względu na silnie nieliniowy wpływ zmiennych decyzyjnych, może być rozwiązany za pomocą metod sztucznej inteligencji. W szczególności algorytmy genetyczne, jako metody optymalizacji wielokryterialnej stają się bardzo użyteczne [11].

Z definicji (22) wynika, że poszukiwane będą rozwiązania w postaci pewnego podzbioru w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych. Każdemu rozwiązaniu przypisane będą odpowiednie wartości obu kryteriów wyznaczające jego położenie w tym zbiorze. Jednocześnie każdemu rozwiązaniu odpowiada wektor zmiennych decyzyjnych $Z=[Z_1(d_1),Z_2(d_2),\ldots,Z_N(d_N)]$, czyli wartości impedancji odpowiednich i-tych powierzchni brzegowych. W tym przypadku poszukiwane są rozwiązania spełniające kryterium Pareto-optymalności.

Rozwiązanie $F(Z^0)=[p^0_{rms}, f^0_{koszt}]^T$ ze wszystkich możliwych rozwiązań z przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych, któremu odpowiada wektor zmiennych decyzyjnych (osobnik, chromosom) $Z^O=[Z^O_1(d_1), Z^O_2(d_2),\ldots, Z^O_N(d_N)]$ jest Pareto-optimalne wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje inne rozwiązanie $F(Z^*)=[p^*_{rms}, f^*_{koszt}]^T$ przy

$Z^*=[Z^*_1(d^*_1), Z^*_2(d^*_2),\ldots, Z^*_N(d^*_N)]$ takie, że $F(Z^*)\leq F(Z_O)$ oraz $p^*_{rms}< p^0_{rms}$ lub $f^*_{koszt}< f^0_{koszt}$. Innymi słowy nie istnieje inne rozwiązanie Z*, które „polepsza" przynajmniej jedno z kryteriów.

Algorytmy genetyczne stanowią metodę bezpośrednią poszukiwania rozwiązań Pareto-optymalnych. Poprzez tzw. ,,rangowanie" w procesie selekcji wyodrębnienia się rozwiązania niezdominowane na kolejnych poziomach. Każdemu rozwiązaniu w rozpatrywanej przez algorytm populacji nadawane są rangi. Rozwiązanie, odpowiadające wektorowi zmiennych decyzyjnych $Z^1=[Z^1_1, Z^1_2\ldots Z^1_N]$ dominuje rozwiązanie odpowiadające wektorowi $Z^2=[Z^2_1, Z^2_2\ldots Z^2_N]$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} &p_{rms}(Z^1)\leq p_{rms}(Z^2)\wedge f_{koszt}(Z^1)\leq f_{koszt}(Z^2)\\ &oraz\ p_{rms}(Z^1)< p_{rms}(Z^2)\vee f_{koszt}(Z^1)< f_{koszt}(Z^2)\end{aligned} \tag{24}$$

W każdej iteracji wszystkie niezdominowane rozwiązania wyznaczone zgodnie z (24) uzyskują rangę równą 1 (rank=1). Następnie są one czasowo usuwane z rozpatrywanej populacji i proces selekcji i poszukiwania niezdominowanych rozwiązań powtarza się. Tym razem wyselekcjonowane rozwiązania niezdominowanie otrzymują rangę równą 2 (rank=2). Procedura ta jest powtarzana do chwili, gdy wszystkie rozwiązania w populacji otrzymają odpowiednio kolejne rangi. W tym przypadku rangi przypisywane są jednocześnie do odpowiednich osobników. Następnie rangi są przeliczane w ten sposób, że osobniki z rangą 1 otrzymują rangę z godnie z formułą: max(rank)+1-rank. Jednocześnie osobniki z rangą 1 uzyskują rangę najwyższą max(rank) a te posiadające dotychczas rangę najwyższą otrzymują 1. Następnie stosując metodę ruletki wyodrębnia się rodziców dla nowej, ,,lepszej" generacji osobników. Stosowana jest liniowa wersja tej metody polegająca na wykorzystaniu generatora liczb losowych (pseudo-losowych) z rozkładu jednostajnego w zakresie <0 1). Wygenerowana liczba losowa jest następnie mnożona przez sumę wszystkich rang i następnie porównywana z kolejno sumowanymi rangami osobników, licząc od najniższej (rank=1) aż do rangi, która w sumie z poprzednimi zbliży się najbardziej, ale nie przekroczy wartości losowo wygenerowanej liczby pomnożonej przez sumę rang. Osobnik taki wybierany jest do reprodukcji nowej generacji jako rodzic. W ten sposób tworzone są pary rodziców. Procedura ruletki jest powtarzana do chwili gdy jej licznik (,,liczba obrotów") nie osiągnie połowy populacji. Za każdy obrotem ruletki wybierana jest para rodziców.

Następnie wyselekcjonowane pary osobników-rodziców tworzą nową generację potomków poprzez krzyżowanie i mutację. Jednocześnie tzw. elityzm gwarantuje bezpośrednie przejście części najlepszych genów, czyli zmiennych decyzyjnych, bezpośrednio do nowej generacji. Zaproponowana tu metoda krzyżowania nazwana jest krzyżowaniem wielopunktowym i odbywa się według następującej formuły:

$$\begin{aligned} Z^{C1}&=S\cdot Z^{P1}+S^-\cdot Z^{P2}\\ Z^{C2}&=S\cdot Z^{P2}+S^-\cdot Z^{P1}\end{aligned} \tag{25}$$

gdzie S jest ciągiem losowo uporządkowanych liczb 0 i 1, a $S^-$ jest ciągiem, w którym liczby 0 i 1 zostały zamienione miejscami. Długość ciągów S i $S^-$ jest równa liczbie zmiennych decyzyjnych N. Osobniki $Z^{C1}$, $Z^{C2}$, to nowa generacja potomków, a $Z^{P1}$, $Z^{P2}$, to generacja rodziców. W opisywanym przypadku optymalizacji proces mutacji musi być zmodyfikowany. W każdej nowej generacji określona część genów wektora $Z^C$ zamieniana była na geny losowo wygenerowane, ale tylko ze zbioru określonych, dyskretnych wartości. Związane jest to z faktem, iż grubości materiału absorbującego przyjmować mogą tylko pewne wartości d. Zamyka to jeden cykl działania algorytmu, czyli kończy jedną iterację. Należy zwrócić uwagę, że dzięki procesowi selekcji opartemu na nadawaniu odpowiednich rang poszczególnym rozwiązaniom z badanej populacji, nie ma konieczności budowania funkcji transformującej (funkcji przystosowania, funkcji użyteczności) w celu wyznaczania wartości $F(Z_i)$, która występuje w ogólnej definicji Pareto-optymalności oraz sformułowaniu problemu optymalizacji (22). Jej wartości w tym przypadku odpowiadają wartości rangi. Stąd użyte wcześniej określenie bezpośredniej metody poszukiwania rozwiązań Pareto-optymalnych.

Ostatecznie w celu otrzymania rozwiązań o stosunkowo równomiernie rozmieszczonych na krzywych lub powierzchniach Pareto-optymalnych wyniki leżące zbyt blisko siebie mogą być usuwane.

## 5. WNIOSKI

Wiele problemów technicznych można i należy optymalizować. Zjawiska nimi rządzące zazwyczaj opisane są równaniami różniczkowymi, których rozwiązanie wymaga znacznych nakładów czasu i kosztów obliczeniowych. Skomplikowana funkcja celu wydłuża proces optymalizacji. Drugim problemem jest wybór najlepszej z możliwych metod optymalizacji. Szczególnie ważne zagadnienie, kiedy należy rozpatrywać jednocześnie wiele kryteriów przy dużej liczbie zmiennych decyzyjnych.

Przykładem skomplikowanego zjawiska fizycznego jest opisane za pomocą równania falowego pole akustyczne, generowane przez źródło wibroakustyczne umieszczone wewnątrz obszaru zamkniętego. Rozwiązanie tego problemu można uzyskać różnymi sposobami np. metodą elementów skończonych lub elementów brzegowych. Metody te jednak wymagają poniesienia znacznych kosztów obliczeniowych. W pewnych warunkach można zastosować do rozwiązania równania falowego, które może opisywać również inne zjawiska fizyczne, metodę opartą na założeniach analizy modalnej. Dzięki temu uzyskiwane są korzyści w postaci znacznego skrócenia czasu obliczań wartości funkcji celu, dzięki wykorzystaniu modelu analitycznego (3) i w stanie ustalonym wartości amplitud modalnych (17) oraz dalsze uproszczenie wykorzystując zależność (19) do wyznaczania średniokwadratowego ciśnienia $p_{rms}$, jako parametru charakteryzującego właściwości pola akustycznego. Znaczne koszty obliczeniowe działania algorytmu wiążą się również z faktem, że w jednej iteracji badana jest określona, czasem nawet bardzo liczna populacja rozwiązań. Dlatego ważne staje się sformułowanie funkcji celu, której wartości możemy uzyskiwać w możliwie najkrótszym czasie, co znacznie zniweluje tę niedogodność.

Wpływ warunków brzegowych (zmiennych decyzyjnych) na wartości amplitud modalnych wykorzystanych w funkcji celu jest trudny do analizy ze względu na wpływ wielu czynników i zastosowanie modeli nieliniowych takich jak opisane zależnościami (20) i (21). Jeżeli funkcja celu jest wielokryterialna, zagadnienie dodatkowo się komplikuje. W związku z tym zastosowywanie algorytmów genetycznych, jako bezpośredniego narzędzia optymalizacji wielokryterialnej jest w pełni uzasadnione. Dzięki mechanizmom w nich zaimplementowanych nieistotny staje się charakter funkcji celu. Ważne natomiast jest szybkie wyznaczanie jej wartości (w tym przypadku wartości kryteriów).

W działaniu algorytmu genetycznego ważną rolę odgrywają procesy losowe. Przy ich wykorzystaniu niezbędna jest wiedza, o ich działaniu w poszczególnych procesach algorytmu. Wielokrotnie występuje konieczność ich modyfikacji w zależności od rodzaju rozwiązywanego zagadnienia. W przedstawianym problemie konieczne jest zmodyfikowanie procesu mutacji tak, aby wartości zmiennych decyzyjnych (genów) w mutowanym osobniku (wektorze zmiennych decyzyjnych) były wybierane losowo ale ze ściśle określonego zbioru.

Przy odpowiednim zaprogramowaniu algorytmu, otrzymywany jest bezpośrednio zestaw rozwiązań Pareto-optymalnych [10, 13]. Można wybrać spośród nich rozwiązanie najlepsze, w zależności od ,,ważności" poszczególnych kryteriów.

Procedurę optymalizacji przedstawioną powyżej można zastosować do wielu problemów spotykanych w technice. Może to być np. problem hałasu niskoczęstotliwościowego w kabinach kierowców lub operatorów maszyn czy wygłuszanie przedziałów roboczych z umieszczonymi w nich maszynami czy silnikami.

## 6. BIBLIOGRAFIA

[1] Cempel C.: Wibroakustyka stosowana, Poznań, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN 1988.
[2] Delaney M.E., Bazley E.N.: Acoustic properties of fibrous absorbent materials, Apllied Acoustics, 3 (1970) 105-116.
[3] Horoshenko K.V., Khan A., i inni: Reproducibility experiments on measuring acoustical properties of rigid frame porous media (round robin tests), Journal of the Acoustical Society of America, 122, 1 (2007) 345-353.
[4] Lafarge D., Lamarinier P., Allard J.F.: Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies, 102, 4 (1997) 1995-2006.
[5] Marler R.T., Arora J.S.: Survey of multi-objective optimization methods for engineering, Struct Multidisc Optim, 26 (2004) 369-395.
[6] Meissner M.: Computational studies of steady-state sound field and reverberant sound decay in a system of two coupled rooms, Central European Journal of Physics, 5, 3 (2007) 293-312.
[7] Michalewicz Z.: Algorytmy genetyczne+struktury danych=programy ewolucyjne, Warszawa, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 2003.
[8] Popov A.: Genetic algorithms for optimization, Programs for Matlab, Version 1.0, \url: \url{http://www.automatics.hit.bg (2005).
[9] Sagartzazu X., Hervella-Nieto L., Pagalday J. M.: Review in sound Absorbing Materials, Archives Computational Methods in Engineering, 15, 2 (2008) 311-342.
[10] Błażejewski A. Krzyżyński T., Multi-objective optimization using genetic algorithm in room acoustic, LOGISTYKA Nr 6/2010 r. 2010, str. 281-289.
[11] Marler R.T., Arora J.S., Survey of multi-objective optimization methods for engineering, Structural and Multidisciplinary Optimization 26, (2004) 369–395.
[12] Schroeder M., The Schroeder frequency revisited, Journal of the Acoustical Society of America 99, (1996) 3240–3241.
[13] Błażejewski A. Krzyżyński T., Multi-objective optimization of the acoustic impedance distribution for room steady state sound field condition, VIBRATIONS IN PHYSICAL SYSTEMS Tom 24 r. 2010, str. 57-62.