Igor AREFYEV

Akademia Morska w Szczecinie
Wydział Inżynieryjno-Ekonomiczny Transportu,
Instytut Inżynierii Transportu
Zakład Technologii Transportu Zintegrowanego i Ochrony Środowiska
70 - 507, Szczecin, ul. Henryka Pobożnego 11
i.arefyev@am.szczecin.pl

OPTYMALIZACJA W ZADANIACH LOGISTYKI ANALITYCZNEJ

Streszczenie:

Obiektem logistyki analitycznej (ekonometrii logistyki) jest opracowanie metod i środków modelowania, poszukiwanie i znajdowanie optymalnych rozwiązań w zakresie zarządzania systemami logistycznymi. Pojęcie jakości decyzji charakteryzuje się zasadą optymalności. Kształtowanie praktycznych metod optymalizacji modelów logistycznych wynika z dwóch podstawowych tez: 1. zadanie optymalizacji może być przedstawione w formie pewnego kryterium efektywności, 2. osiągnięte wielkości takiego kryterium są ograniczone do zbioru dopuszczalnych rozwiązań, co istotnie wpływa na uzyskanie wysokiego rezultatu w określeniu tej efektywności tej wydajności. Niniejsze opracowanie poświęcone jest poszukiwaniu rozwiązania danej sprzeczności.

Słowa kluczowe: logistyka, model, optymalizacja, kryterium, efektywność.

WSTĘP

Problem wyboru optymalnego rozwiązania logistyki ogólnie sprowadza się do trzech podstawowych postulatów [3]:

- znajdowanie klasy $\overline{A}$ wariantów działań (planów, prognozowania i in.), których wybór powinien być oparty na przeprowadzeniu badania lub analizy;
- wybór zbioru $\overline{S}$ stanów warunków zewnętrznych (wariantów kompleksu zadań), z których jeden może pojawić się w procesie realizacji wybranego rozwiązania;
- określenie wskaźnika efektywności działania (funkcja docelowa) $u = u(A,S)$, którego wielkość zależy od wybranego rozwiązania $A \in \overline{A}$ i stanu $S \in \overline{S}$.

Jeśli przyjmiemy, że wskaźnik efektywności odpowiada wybranemu celowi zachowania systemu logistycznego, to logicznym jest przyjęcie funkcji docelowej za «model» celu [1,3].

1. ZADANIE OPTYMALIZACYJNE

Aby poprawnie określić zadanie optymalizacji i wybrać metody matematyczne jego rozwiązania, należy:

- zbudować model matematyczny, opisujący wewnętrzną strukturę badanego systemu logistycznego;
- wybrać i uzasadnić kryterium optymalizowane;

- znaleźć i formalnie określić ograniczenia i związki, właściwe dla rozpatrywanego systemu (obiektu logistycznego).

Zadanie optymalizacji przy takim podejściu może być sformułowane w następujący sposób. Niech stan obiektu określany jest w każdym odcinku czasu n przez liczby $(x_1, x_2, ..., x_n)$, które są fazowymi współrzędnymi systemu. Współrzędne fazowe to jest ta minimalna liczba parametrów, z pomocą której opisywany jest stan badanego systemu.

Współrzędne fazowe stanowią uogólnienie pojęcia współrzędnych geometrycznych. Dlatego stan systemu można przedstawiać w postaci punktu z tymi współrzędnymi w pewnej warunkowej przestrzeni fazowej. Ruch obiektu w przestrzeni fazowej nie odbywa się samorzutnie, można nim zarządzać. W tym celu obiekt wyposażony jest w «organy administracji», których położenie określane jest w każdym odcinku czasu r liczbami $u_1, u_2, ..., u_r$ zarządzającymi parametrami.

Między współrzędnymi fazowymi, zarządzającymi parametrami i zmienną niezależną (czas) istnieją związki, które matematycznie wyrażane są przez równania w przyjętej formie: różniczkowe, algebraiczne i in. Zazwyczaj parametry zarządzające, a w poszczególnych przypadkach również pewne współrzędne fazowe nie mogą osiągać dowolnych wartości. Dlatego praktycznie zawsze wyodrębniana jest przestrzeń parametrów zarządzających (tzw. przestrzeń zarządzania), określane są ograniczenia dla współrzędnych fazowych [3]. A więc zadanie optymalizacji w zakresie modelu logistycznego polega na tym, żeby według początkowego stanu fazowego systemu znaleźć takie systemy zarządzania, które maksymalizują kryterium. W pewnych przypadkach zgodnie z warunkami zadania mogą również być opisane wielkości skończone szeregu współrzędnych fazowych.

W zależności od rodzaju ograniczeń, formy modelu matematycznego opisującego strukturę wewnętrzną obiektu i rodzaju kryterium optymalizowanego stosuje się różne metody optymalizacji. Ponieważ forma matematycznego modelu systemu logistycznego wywiera decydujący wpływ na wybór metody optymalizacji, to zadania optymalizacji należy podzielić na dwie grupy [2]:

1. Zadania optymalizacji parametrów i charakterystyk systemów logistycznych (obiektów, procesów), których model matematyczny zawiera w sobie system równań różniczkowych.

   Określają one pochodne współrzędnych fazowych przez same współrzędne fazowe i parametry zarządzające:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_i, x_n; u_1, u_j, u_r; t); \quad i = 1,2,...,n; \quad j = 1,2,...,r, \tag{1}$$

   gdzie: x_i – współrzędne fazowe obiektu;

   u_j – oddziaływania zarządzające;

   oraz równania opisujące wielostopniowe procesy dyskretne:

$$x^{(n)} = T_n\left(x^{(n-1)}, u_n\right), \quad n = 1,2,..., N, \tag{2}$$

   gdzie: T_n – operator przekształcenia, ogólnie zależny od n;

   Zadania optymalizacji parametrów i charakterystyk systemu logistycznego (obiektu, procesu), których model matematyczny uwzględnia istnienie związków między parametrami zarządzającymi i współrzędnymi fazowymi w postaci stosunków skończonych (równań algebraicznych, tabel, wykresów itp.)

$$\varphi_k(x_i, u_j, c_1, c_2, ...) = 0. \tag{3}$$

Druga grupa zadań nie jest łatwiejsza mimo wydającej się prostoty związków między parametrami zarządzającymi i współrzędnymi fazowymi. Chodzi o to, że w tej grupie występuje dostatecznie złożona struktura w postaci optymalizowanych kryteriów (funkcji docelowych). To uzasadnione jest następującymi okolicznościami: większość elementarnych procesów i zjawisk, z których składa się schemat logistyczny z natury swojej zawiera w sobie element przypadku (stochastyczność). A więc, ich rezultaty są również przypadkowe. Dlatego uwzględnienie stochastyczności procesu już samo z siebie znacznie komplikuje rozwiązanie zadania. Oprócz tego, wybór kryterium do drugiej grupy zadań jest dostatecznie złożonym problemem, zazwyczaj wymagającym oddzielnego badania [2,3].

Wobec kryterium (funkcji docelowej, wskaźnikowi wydajności) systemu logistycznego wysuwa się szereg sprzecznych wymagań. Z jednej strony powinno być reprezentatywne, krytyczne wobec badanych parametrów, w sposób istotny podlegać przekształceniu przy stosunkowo małej zmianie badanych parametrów i adekwatnie oceniać podstawowe zadanie optymalizacji. Z drugiej strony powinno być w miarę możliwości nieskomplikowane i przedstawione we wzorze obliczeniowym. Dostatecznie często w drugiej grupie zadań za optymalny uważa się taki wynik, który zapewnia wykonanie postawionego zadania przy minimum materialnych nakładów (proste postawienie) i takie rozwiązanie, które wskazuje na maksimum efektywności (wykonanie maksimum zadań) przy stałych materialnych nakładach (odwrotne postawienie). Stąd bardziej ogólną formą kryterium przy prostym postawieniu zadania będzie wartość oczekiwana materialnych nakładów przy zadanej efektywności. W przypadku odwrotnego postawienia zadania bardziej ogólną formą kryterium będzie wskaźnik wydajności przy zadanych materialnych nakładach.

Wiadomo, że metody optymalizacji można podzielić na dwie grupy: **analityczne** i **numeryczne**. W celu wykorzystania metod analitycznych jest niezbędne, aby wzór obliczeniowy kryterium, ograniczenia i związki między współrzędnymi, parametrami zarządzającymi i zmienną niezależną, jak również warunki początkowe i końcowe były przedstawione w postaci funkcji, powinny być chociaż raz różniczkowalne i posiadać skończoną liczbę punktów nieciągłości. W przypadku korzystania z metod analitycznych można łatwiej znaleźć rozwiązanie spełniające konieczne warunki istnienia ekstremum, ale znacznie trudniejsze jest sprawdzenie ich wystarczalności.

W celu wykorzystania metod obliczeniowych należy znać możliwy obszar zmiany parametrów zarządzających. Metody obliczeniowe formalnie mogą być stosowane w każdym przypadku, jednak ich możliwości ograniczone są przez pracochłonność obliczeń. W przypadku zastosowania tych metod uzasadnione jest poszukiwanie globalnego, a nie lokalnego ekstremum.

Rozwiązanie zadań optymalizacyjnych logistyki dostatecznie często związane jest z koniecznością poszukiwania takich wielkości zmiennych niezależnych $x_1, x_2, ..., x_n$, dla których pewna funkcja tych zmiennych $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ osiąga maksimum lub minimum (ekstremum).

W celu znalezienia ekstremum funkcji $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ należy wyznaczyć pierwiastki układu równań:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = 0; \quad \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_2} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n} = 0, \quad i = 1, n. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Punkt, w którym funkcja posiada wszystkie pochodne cząstkowe ze zmiennymi niezależnymi równymi zeru nosi nazwę punktu stacjonarnego. Jednocześnie w systemach logistycznych punkt stacjonarny nie zawsze stanowi lokalne ekstremum, a niektóre punkty (stacjonarne) występują na przykład w postaci punktów siodłowych [1,3].

Funkcja ciągła $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ od n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, ..., x_n$ osiąga maksimum lub minimum wewnątrz zamkniętego obszaru tylko przy takich wielkościach zmiennych x_i, dla których n pochodnych cząstkowych (4) jednocześnie przekształca się w zero (punkt stacjonarny) albo jedna lub kilka takich pochodnych przestają istnieć (nieciągłość).

Następnie, gdy wyznaczone są punkty stacjonarne lub punkty nieciągłości, pozostaje zbadać czy są wśród nich punkty ekstremalne. Odpowiedzieć na to pytanie można za pomocą kilku metod [2].

Dla funkcji jednej zmiennej badane jest zachowanie drugi pochodnej w punkcie stacjonarnym. Istnieją również metody analityczne dla funkcji dwóch zmiennych. Warunki analityczne istnienia ekstremum dla funkcji wielu zmiennych są złożone, dlatego w przypadku budowy modelu logistycznego szeroko stosowana jest metoda polegająca na bezpośrednim porównaniu wielkości funkcji w punktach stacjonarnych z jej wielkościami w punktach nieciągłości i ich okolicach.

Ekstrema mogą znaleźć się także na granicy zamkniętego obszaru określoności funkcji. Jeśli zadanie logistyczne jest n- wymiarowe, to poszukiwanie ekstremum na granicy prowadzi do jednego lub kilku zadań minimum w przestrzeniach wymiarów $n-1,\ \ n-2, ..., 1$. Jednak w przypadku dużej liczby zmiennych to zadanie staje się praktycznie nie do rozwiązania. Rozwiązanie takiego zadania jest możliwe tylko w warunkach przejścia do metod programowania nieliniowego. Dostatecznie często, szczególnie w drugiej grupie zadań, n zmiennych $x_1, x_2, ..., x_n$ podporządkowane są dodatkowym warunkom

$$\left.\begin{aligned} &q_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ &q_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &q_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

W tym przypadku liczba niezależnych zmiennych skraca się do $(n-m)$. A jeśli $n > m$, to istnieje jedna lub więcej zmiennych niezależnych, w stosunku do których można poszukiwać ekstremum funkcji $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ przy dodatkowych warunkach m (związkach) wzoru (5).

W najprostszych zadaniach efektywną może być metoda podstawiania. Podstawianie polega na rozwiązaniu m równań (5) w stosunku do m z n zmiennych i sprowadzenia rozpatrywanego zadania ekstremalnego do nowego ekstremalnego zadania dla funkcji zmiennych od $(n-m)$

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_{n-m}) \tag{6}$$

Jednak metoda podstawiania okazuje się niedostateczna, ponieważ układ m równań nie może być rozwiązany w zależności od m zmiennych. W tym przypadku należy zastosować metodę mnożników Lagrange'a. Wymaganych warunków stacjonarności funkcji

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ z warunkami dodatkowymi (5) można poszukiwać przy pomocy sporządzenia rozszerzonej funkcji

$$F(x_1,...x_n) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j q_j (x_1,...,x_n) \tag{7}$$

Wtedy proponowane zadanie zostanie sprowadzone do zadania bez warunków dodatkowych. Parametry $\lambda_j \quad (j = 1,..., m)$ odnoszą się do mnożników Lagrange'a. Przy rozwiązywaniu takiego rodzaju zadania one powinny być usunięte przy pomocy rozszerzenia warunków dodatkowych (5).

2. WNIOSKI

Wynikiem przedstawionego w artykule materiału są następujące wnioski:

- określone są ogólne zadania logistyki analitycznej stanowiących ogół modelów opisujących strukturę wewnętrzną systemu logistycznego optymalizującego kryterium, formalnie określonych ograniczeń i związków danego systemu;
- przedstawiono dwie grupy zadań optymalizacji systemów logistycznych (procesów) jako szeregu zadań optymalizacji parametrów i charakterystyk poprzez pochodne współrzędnych fazowych i optymalizowane kryteria zachowania obiektu logistycznego;
- określono wymagania dla kryterium zachowania systemu logistycznego jako istotnie zmieniający się wskaźnik przy małej zmianie parametrów samego obiektu;
- uzasadniono racjonalność stosowania mnożników Lagrange'a przy niezadowalających rozwiązaniach optymalizacji zadań logistyki analitycznej przy pomocy metody podstawiania.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arefyev I. Modelownie węzła transportowego z terminalami, Warszawa, AN Polski, «Logistic systems» 2005, s. 85-93

[2] Арефьев И.Б., Мартыщенко Л.А. Теория управления. Спб., СЗТУ, 2000. 174 s.

[3] Arefyev I., Martyszczenko L. Logistyka analityczna: metody i zadania «Transport XXI century» Warszawa: ANP, 2007. s. 15-23

OPTIMIZATION PROBLEMS IN ANALYTICAL LOGISTICS

Abstract:

The object of analysis of logistics (logistics econometrics) is to develop methods and modeling tools for finding optimal solutions for management logistics systems. Representation of the quality of solutions is characterized by optimality principle. Formation practical optimization methods logistic models derived from two fundamental points: in the preview, optimization problem can be expressed in the form of an efficiency criterion, Second-accessible value of this criterion is limited to the set of admissible decisions that significantly affect receiving a high result in the determination this effectiveness. Find a solution to this contradiction is devoted to this work.

Key words: logistics, model, optimization criterion, th.