

Wacław SZCZEŚNIAK<sup>1</sup>  
Magdalena ATAMAN<sup>1</sup>

### PEWNE PRZYPADKI KLASYCZNEJ TEORII ZDERZENIA

*W pracy przeanalizowano zderzenie sprężysto-plastyczne złożonego układu dwóch sztywnych belek, pomiędzy którymi znajduje się sztywny krążek. W taki układ uderza poziomo sztywna belka. W zadaniu mamy do czynienia, tuż po uderzeniu, z siedmioma niewiadomymi prędkościami i impulsami sił. Niewiadome wyznaczono układając układ siedmiu równań i rozwiązując go komputerowo przy pomocy pakietu Mathematica. Dokonano analizy szczególnych przypadków tego rozwiązania. W drugiej części komunikatu rozwiązano przypadek kiedy dolna belka układu jest obciążona zadaniem impulsem siły. Podano również bogatą literaturę przedmiotu.*

### CERTAIN CASES OF CLASSIC THEORY OF IMPACT

*In the paper elastic-plastic impact of compound system is analyzed. Into the system consisted of two beams and rigid roller between them impacts another rigid beam. There are seven unknown quantities (velocities and impulse forces) to find out. Solution of seven equations is obtained using Mathematica. In the second part of the paper case when the bottom beam of the system is forced by known impulse force is solved. Several items of literature are mentioned at the end of the paper.*

## 1. WSTĘP

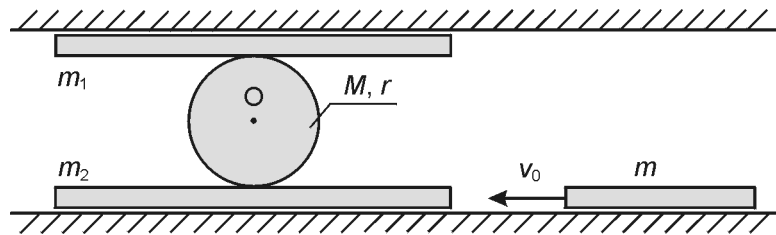
W pracy analizujemy sztywny układ materialny złożony z dwóch poziomych belek i krążka pomiędzy nimi. Belki znajdują się w idealnie gładkich poziomych prowadnicach. Dodatkowo zakładamy brak poślizgu pomiędzy belkami i krążkiem po uderzeniu poziomą sztywną belką w dolną belkę układu. Zderzenie jest sprężysto-plastyczne a współczynnik restytucji jest dany. W zadaniu występuje siedem niewiadomych prędkości i impulsów sił. W celu ich wyznaczenia ułożono siedem równań teorii zderzenia, które rozwiązano przy użyciu pakietu Mathematica. Przeanalizowano szczególne przypadki zderzenia plastycznego i idealnie sprężystego. Wyznaczono straty energii kinetycznej, a przypadku zderzenia sprężystego dokonano sprawdzenia poprawności rozwiązania.

---

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,  
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;  
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

## 2. RÓWNANIA KLASYCZNEJ TEORII ZDERZENIA W ROZWAŻANYM UKŁADZIE MATERIALNYM

Schemat dynamiczny rozważanego problemu pokazano na rysunku 1. Belka górna i dolna mają dane masy całkowite odpowiednio  $m_1$  i  $m_2$ . Sztywny krążek o masie  $M$  i promieniu  $r$ , umieszczony jest pomiędzy deskami. W dolną deskę  $m_2$  uderza inna sztywna deska o masie  $m$ , poruszająca się ze stałą, zadaną prędkością  $v_0$  po doskonale gładkiej, poziomej powierzchni dolnej prowadnicy. Założymy przy tym, że zderzenie jest sprężysto-plastyczne a współczynnik restytucji Newtona jest dany i wynosi  $\zeta$ .



Rys.1. Schemat dynamiczny rozważanego układu materialnego

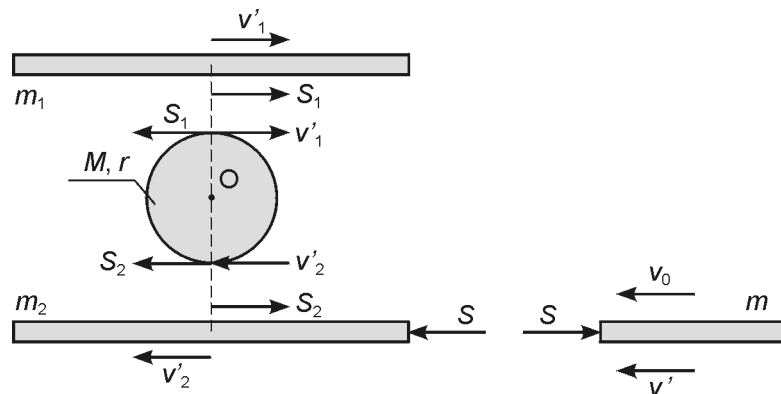
Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 2, na którym pokazano prędkości i impulsy sił w chwili tuż po uderzeniu mamy do czynienia z siedmioma następującymi niewiadomymi:  $v'$ ,  $v'_1$ ,  $v'_2$ ,  $\omega'$ ,  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . Pięć klasycznych równań teorii uderzenia, równanie więzów oraz definicję współczynnika restytucji zapisujemy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} -S &= m(v' - v_0), \quad S - S_2 = m_2 v'_2, \quad S_1 = m_1 v'_1, \quad S_1 + S_2 = M \frac{1}{2} (v'_2 - v'_1), \\ r(S_2 - S_1) &= \frac{1}{2} M r^2 \omega', \quad v'_1 + v'_2 = 2r \omega', \quad \zeta = -\frac{v' - v'_2}{v_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Po komputerowym rozwiązaniu układu siedmiu równań (1) otrzymujemy następujące odpowiedzi:

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v_0 \{ m(3M + 8m_1) - [M^2 + 8m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2)] \zeta \}}{M^2 + m(3m + 8m_1) + 8m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2)}, \\ v'_1 &= \frac{mM v_0 (1 + \zeta)}{M^2 + m(3m + 8m_1) + 8m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2)}, \\ v'_2 &= \frac{m(3M + 8m_1) v_0 (1 + \zeta)}{M^2 + m(3m + 8m_1) + 8m_1 m_2 + 3M(m_1 + m_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{2m(M+2m_1)v_0(1+\zeta)}{\left[M^2+m(3m+8m_1)+8m_1m_2+3M(m_1+m_2)\right]r}, \\ S &= \frac{m\left[M^2+8m_1m_2+3M(m_1+m_2)\right]v_0(1+\zeta)}{M^2+m(3m+8m_1)+8m_1m_2+3M(m_1+m_2)}, \\ S_1 &= \frac{mMm_1v_0(1+\zeta)}{M^2+m(3m+8m_1)+8m_1m_2+3M(m_1+m_2)}, \\ S_2 &= \frac{mM(M+3m_1)v_0(1+\zeta)}{M^2+m(3m+8m_1)+8m_1m_2+3M(m_1+m_2)}.\end{aligned}\quad (\text{c.d. } 2)$$



Rys.2. Układ prędkości i impulsów w chwili tuż po uderzeniu belki \$m\$ w rozważany mechanizm

W szczególnym przypadku zadania, przy \$M = m = m\_1 = m\_2\$, odpowiedzi (2) ulegają uproszczeniu i są następujące:

$$\begin{aligned}v' &= \frac{1}{26} v_0 (11 - 15\zeta), \quad v'_1 = \frac{1}{26} v_0 (1 + \zeta), \quad v'_2 = \frac{11}{26} v_0 (1 + \zeta), \quad \omega' = \frac{3v_0(1+\zeta)}{13r}, \\ S &= \frac{15}{26} M v_0 (1 + \zeta), \quad S_1 = \frac{1}{26} M v_0 (1 + \zeta), \quad S_2 = \frac{2}{13} M v_0 (1 + \zeta).\end{aligned}\quad (3)$$

W przypadku zderzenia idealnie sprężystego \$\zeta = 1\$, odpowiedzi (3) ulegają dalszemu uproszczeniu zgodnie ze wzorami:

$$v' = -\frac{2}{13}v_0, \quad v'_1 = \frac{1}{13}v_0, \quad v'_2 = \frac{11}{13}v_0, \quad \omega' = \frac{6}{13r}v_0, \quad S = \frac{15}{13}Mv_0, \quad (4)$$

$$S_1 = \frac{1}{13}Mv_0, \quad S_2 = \frac{4}{13}Mv_0.$$

Poprawność rozwiązania w tym ostatnim przypadku łatwo sprawdzić wyliczając energię kinetyczną rozważanego układu przed zderzeniem i po zderzeniu. Przy zderzeniu idealnie sprężystym obie energie powinny być takie same, bowiem nie może być straty z definicji przy takim zderzeniu. Mamy, zatem:

$$E_k = \frac{1}{2}Mv_0^2, \quad E'_k = \frac{1}{2}M\frac{r^2}{2}(\omega')^2 + \frac{1}{2}M(v')^2 + \frac{1}{2}M(v'_1)^2 + \frac{1}{2}M(v'_2)^2 + \frac{1}{2}M\frac{1}{2}(v'_2 - v')^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2, \quad E_k = E'_k, \quad \Delta E_k = \frac{E_k - E'_k}{E_k} \times 100\% = 0. \quad (5)$$

Podamy jeszcze odpowiedzi (3) w przypadku zderzenia czysto plastycznego, przy którym straty energii kinetycznej są największe, mamy wtedy:

$$v' = \frac{11}{26}v_0, \quad v'_1 = \frac{1}{26}v_0, \quad v'_2 = \frac{11}{26}v_0, \quad \omega' = \frac{3v_0}{13r}, \quad (6)$$

$$S = \frac{15}{26}Mv_0, \quad S_1 = \frac{1}{26}Mv_0, \quad S_2 = \frac{2}{13}Mv_0.$$

W tym przypadku belka o masie  $M$  przykleja się do dolnej belki mechanizmu i prędkości  $v' = v'_2$ , tak jak być powinno.

### 3. OBCIĄŻENIE UKŁADU ZADANYM IMPULSEM $S_0$

W rozwiązywanym przykładzie można przyjąć alternatywnie że, zamiast belki o masie  $m$  układ obciążony jest zadany impuls  $S_0$ . W takim przypadku spada liczba niewiadomych do pięciu. Równania (1) ulegają redukcji i są następujące:

$$S_0 - S_2 = m_2 v'_2, \quad S_1 = m_1 v'_1, \quad S_1 + S_2 = M \frac{1}{2} (v'_2 - v'_1), \quad (7)$$

$$r(S_2 - S_1) = \frac{1}{2} M r^2 \omega', \quad v'_1 + v'_2 = 2r\omega'.$$

Rozwiązanie układu pięciu równań w tym przypadku prowadzi do odpowiedzi:

$$\begin{aligned}
v_1' &= \frac{M S_0}{M^2 + 8m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2)}, & v_2' &= \frac{S_0(3M + 8m_1)}{M^2 + 8m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2)}, \\
\omega' &= \frac{2S_0(M + 2m_1)}{[M^2 + 8m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2)]r}, & S_1 &= \frac{S_0 M m_1}{M^2 + 8m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2)}, \\
S_2 &= \frac{S_0 M (M + 3m_1)}{M^2 + 8m_1m_2 + 3M(m_1 + m_2)}.
\end{aligned} \tag{8}$$

W szczególnym przypadku przy  $M = m_1 = m_2$  odpowiedzi (8) ulegają uproszczeniu:

$$v_1' = \frac{S_0}{15m_2}, \quad v_2' = \frac{11S_0}{15m_2}, \quad \omega' = \frac{2S_0}{5m_2r}, \quad S_1 = \frac{1}{15}S_0, \quad S_2 = \frac{4}{15}S_0. \tag{9}$$

#### 4. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W komunikacie podano rozwiązanie analityczne klasycznej teorii zderzenia pewnego sztywnego układu materialnego. W układ złożony z dwóch poziomych belek i krążka między nimi uderza sprężysto-plastycznie sztywna belka. W drugiej części opracowania do dolnej belki przyłożono zadany impuls siły. Podano odpowiedzi w obu przypadkach i rozważono kilka przypadków szczególnych analizowanych zadań.

#### 5. LITERATURA

- [1] Smart E.H.: *Advanced Dynamics, Vol. I and Vol. II*. Macmillan and CO., Limited London 1951.
- [2] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>> w zadaniach i przykładach obliczeniowych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [3] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
- [4] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [5] Jakowlew I.A. (ed.): *Sbornik zadacz po obszczemu kursu fizyki*. Mechanika. Nauka, Moskwa 1977.
- [6] Kolesznikow K.S. i inni.: *Sbornik zadacz po teoreticzeskiej miechnanikie*. Nauka, Moskwa 1983.
- [7] Szcześniak W., Ataman M.: *Selected problems of the classic theory of impact*. Logistyka nr 6/2009, str 242-254.
- [8] Szcześniak W., Ataman M.: *Particular Cases of problems of the classic theory of impact*. Logistyka nr 6/2009, str. 255-265.
- [9] Szcześniak W., Ataman M.: *O zderzeniach układów kul pomiędzy sobą i podłożem*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering” XIII, Warsaw 2005, pp. 601-610.

- [10] Szczęśniak W., Ataman M., Kozyra Z.: *O uderzeniu plastycznym czterech prętów przegubowych w sztywne podłoże*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering” XII, Warsaw 2004, pp. 399-408.
- [11] Szczęśniak W.: *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*. OWPW, Warszawa 2000.
- [12] Szczęśniak W., Ataman M.: *Pojedynczy impuls na płycie Kirchhoffa*. XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. OWPW, Warszawa 2009, pp. 157-164.
- [13] Szczęśniak W., Ataman M.: *Grupy impulsów na płycie Kirchhoffa*. XVIII Polish-Russian-Slovak Seminar „Theoretical Foundation of Civil Engineering”. OWPW, Warszawa 2009, pp. 165-170.
- [14] Szczęśniak W.: *Obciążenia impulsowe na bekach*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering” V, Warszawa 1997, pp. 377-385.
- [15] Szczęśniak W.: *Drgania płyt pod wpływem obciążenia impulsowego*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering” V, Warszawa 1997, pp. 386-392.
- [16] Piatnickij E.S., Truchan N.M., Chanukajew Ju.I., Jakowienko G.N.: *Sbornik zadacz po analiticzeskoj mechanikie*. Nauka-Fizmatlit, Moskwa 1980 i 1996.
- [17] Mieszczerski I.W.: *Sbornik zadacz po teoreticzeskoj mechanikie*. GRF-ML, Nauka, Moskwa 1914-1986. (36 wydań).
- [18] Karelitz G.B., Ormondroyd J., Garreltz J.M.: *Problems in mechanics. Based on the original collection of I.V. Mestchersky*. The MacMillan Company, New York 1939.
- [19] Neuber H.: *Lösungen zur Aufgabensammlung Mestcherski*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [20] Szczęśniak W., Ataman M.: *Zastosowanie pakietu Mathematica w mechanice analitycznej*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 1(17), Radom 2003, str. 617-626.
- [21] Morozow S.I. *Souderenije tiel. Kłasiczeskaja teoria udara. Czast 1*, Archangiesk 2001.
- [22] Batujew G.S. i inni.: *Inżynieryjne metody issledowanija udara*. Maszynostrojenije, Moskwa 1969.
- [23] Aleksandrow E.W., Sokolińskij B.W.: *Prikladnaja teoria i rasczety udarnych sistem*. Nauka, Moskwa 1969.
- [24] Goldsmith W.: *Impact*. Arnold, London, 1960.