

Krzysztof SCHIFF*

ALGORYTM WYZNACZANIA WIELO-TOWAROWEGO MAKSYMALNEGO PRZEPIYWU W GRAFACH SKIEROWANYCH

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm wyznaczania maksymalnego przepływu wielo-towarowego w oparciu o algorytm Dinica wyznaczania maksymalnego przepływu jedno-towarowego. Algorytmem Dinica wyznaczono ścieżki i płynące nimi strumienie między każdą parą s-t. Idea zaprezentowanego algorytmu polega na umożliwieniu przepływu towarów krawędziami wchodzącymi w skład wyznaczonych ścieżek w sposób zrównoważony. Ograniczeniu podlegają jedynie strumienie o największych wartościach.

Słowa kluczowe: maksymalny całkowitoliczbowy przepływ wielo-towarowy, grafy skierowane

1. WPROWADZENIE

Przepływ towarów, ludzi, kapitału i informacji oraz zarządzanie tymi strumieniami jest sednem zarządzania logistycznego w firmie. Wielo-towarowy przepływ towarów jest jednym z głównych problemów z obszaru zarządzania logistycznego.

Problem maksymalnego jednostrumieniowego przepływu w grafach skierowanych był badany przez Forda i Fulkersona, którzy oparli swój algorytm o tak zwane ścieżki powiększające strumień przepływający przez sieć, jednakże ich algorytm jest nieograniczony wielomianowo [1]. Dinic w swym algorytmie wyznaczał minimalne ścieżki powiększające i wprowadził pojęcie przepływu blokującego [2]. Algorytm Dinica działa w czasie $O(mn^2)$. Dla trzech i więcej towarów w grafach twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju traci swoją moc. Dla przepływu dwu-towarowego Hu przedstawił twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju [8], rozwiązanie dla problemu maksymalnego strumienia dwu-towarowego oparte o nową strategię zaprezentowano w [9]. Wielostrumieniowy przepływ w grafach polega na znalezieniu takiego strumienia wszystkich towarów w grafie, który zaspokaja zapotrzebowanie spływów na towary dostarczane ze źródeł w grafie skierowanym przy uwzględnieniu pojemności krawędzi grafów, przez które przepływa [10]. W przypadku, gdy krawędziom grafu przypisze się wagi reprezentujące koszt problem nie tylko będzie polegał na znalezieniu maksymalnych strumieni towarów w grafie, ale i na tym, aby koszt ich przesyłu był jak najmniejszy [5,6]. Problem równoległego przepływu (concurrent flow problem) jest wersją problemu wyznaczania maksymalnego przepływu wielo-towarowego (maximum multicommodity flow), którego celem jest znalezienie maksymalnej części z takiej, że przynajmniej z procent każdego zapotrzebowania D_i towaru i przy uwzględnieniu pojemności poszczególnych krawędzi przepływa przez sieć grafu [3,4]. Przepływający strumień w grafie może ulegać podziałowi lub też nie. Jeśli mamy do czynienia ze strumieniem niepodzielnym mówimy wtedy o strumieniu, który podąża jedną ścieżką pomiędzy źródłem s a spływem t . W przypadku strumienia podzielnego strumień może przepływać większą niż jedną liczbą ścieżek łączących źródło ze spływem. Problem całkowitoliczbowego maksymalnego wielotowarowego strumienia podzielnego w grafie jest problemem NP-zupełnym [12], tak jak i niepodzielnego strumienia [11]. Problem wyznaczania minimalnych ścieżek jest podproblemem maksymalnego przepływu wielotowarowego (multicommodity maximum flow problem – MCMFP) i w związku z nim

zaproponowano nowy sposób wyznaczania najkrótszych ścieżek dla problemu wyznaczania maksymalnego przepływu wielo-towarowego w pracy [13]. Prawie całkowity przegląd artykułów naukowych nad ciągłym problemem maksymalnego przepływu wielo-towarowego zawarty jest w [10], zaś przegląd artykułów dla wersji całkowitoliczbowej można znaleźć w [14]. Problem całkowitoliczbowego maksymalnego przepływu wielo-towarowego o minimalnym koszcie jest tematem prac [15,16,17].

Ogólnie problem wyznaczania maksymalnego przepływu wielo-towarowy modeluje się za pomocą grafu G złożonego ze zbioru wierzchołków V i zbioru krawędzi skierowanych E z przypisanymi im przepustowościami $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dla każdego towaru i wyróżnia się wierzchołek podaży s_i i wierzchołek popytu t_i i niezaspokojone zapotrzebowanie D_i . Między wierzchołkiem s_i a t_i musi istnieć ścieżka p_i , aby zapotrzebowanie D_i mogło być zaspokajane. Dla każdego strumienia f_i przepływającego ścieżką powiększającą p_i , gdzie $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$, ograniczenie pojemnościowe każdej krawędzi wchodzącej w skład ścieżki p_i musi być spełnione, co oznacza, że strumień płynący krawędzią z przypisaną mu przepustowością nie może być większy niż ta przepustowość $f_i(e) \leq c_i(e)$. Dla każdego z wierzchołków v w V winne być również spełnione następujące ograniczenia dotyczące wpływających i wypływających strumieni f_i :

$$\sum_{i=1}^m \begin{cases} f_i(u,v) - \sum_{i=1}^m f_i(v,u) = D_i & \text{gdy } v = s_i \\ f_i(v,u) - \sum_{i=1}^m f_i(v,u) = 0 & \text{gdy } v = t_i \\ f_i(v,u) - \sum_{i=1}^m f_i(v,u) = 0 & \text{gdy } v \neq s_i, t_i \end{cases}$$

Problem wyznaczania maksymalnego strumienia wielo-towarowego polega na maksymalizowaniu sumy całkowitoliczbowych strumieni f_i spełniających ograniczenia krawędziowe:

$$\begin{aligned} \text{MAX} \quad & \sum_{i=1}^m f_i \\ \text{X} \quad & f_{ij} \leq c_j \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

gdzie:

f_{ij} - strumień ścieżki p_i przechodzący przez krawędź j o przepustowości c_j

2. ALGORYTM MAKSYMALNEGO WIELO-TOWAROWEGO PRZEPŁYWU

Z początku algorytm w punkcie 1 wykorzystuje procedurę Dinica do wyznaczania dla każdej pary wierzchołków $(s-t)$ zbioru najkrótszych ścieżek powiększających strumień przepływających przez graf G w taki sposób, że jeśli wyznacza ten strumień maksymalny dla jednej z par $(s-t)$ to pozostałe pary nie są brane pod uwagę. W taki sposób otrzymuje się odpowiednio listy wszystkich najkrótszych ścieżek powiększających dla każdej pary $(s-t)$ by tworzyły one w sumie pełną listę ścieżek powiększających dla wszystkich par wierzchołków $(s-t)$. Każda ścieżka powiększająca składa się z krawędzi o określonej przepustowości c_{ij} . Najmniejsza pojemność z tych krawędzi określa wartości maksymalnego strumienia, który może przepływać daną ścieżką powiększającą, co oznaczono przez f_{ijk} , gdzie (i,j) oznaczają krawędź grafu G , zaś k oznacza numer porządkowy najkrótszej ścieżki powiększającej przechodzącej przez daną krawędź. Zsumowanie dla każdej krawędzi strumieni poszczególnych najkrótszych ścieżek powiększających przechodzących przez te krawędzie w punkcie 2.1 algorytmu daje sumaryczny strumień przepływający przez krawędź, który przy nie uwzględnianiu przepustowości i przy swobodnym przepływie strumieni najkrótszych ścieżek powiększających zapewniłby maksymalny strumień wielo-towarowy przepływający przez graf. Jednak istnienie przepustowości krawędzi może ograniczać i często ogranicza wartość sumy tych strumieni najkrótszych ścieżek powiększających. W celu zapewnienia

zrównoważonego przepływu strumieni najkrótszymi ścieżkami powiększającymi ogranicza się te strumienie do wartości równej średniej przepustowości wynikające z przepustowości krawędzi i liczby najkrótszych ścieżek przechodzących przez te krawędzie w punkcie 3 i 4.3 algorytmu. Jednak często jest tak, że niektóre strumienie najkrótszych ścieżek powiększających są mniejsze od średniej przepustowości krawędzi i w związku z tym nie wykorzystywałyby one przydzielonej im średniej przepustowości krawędzi. W celu zwiększenia całkowitego strumienia przepływającego przez krawędź, nie wykorzystane średnie przepustowości przez niektóre strumienie ścieżki powiększające, które są mniejsze od średniej przepustowości, mogą zostać przydzielone innym strumieniom. W tym celu od przepustowości krawędzi odejmuje się te strumienie, które w sposób swobodny mogą przepłynąć przy średniej przepustowości krawędzi, a otrzymaną różnicę dzieli się na pozostałą liczbę ścieżek powiększających przechodzących przez krawędź, które do tej pory były większe niż średnia przepustowość krawędzi. W taki sposób otrzymuje się nową większą od dotychczasowej wartość średniej przepustowości krawędzi. Postępowanie to kontynuowane jest dotąd, dokąd występują średnie przepustowości krawędzi nie wykorzystywane w pełni przez przepływające przez krawędź strumienie ścieżek powiększających. Odpowiada to punktowi 4 algorytmu. Niech przez krawędź o pojemności $c = 18$ przepływa 6 strumieni $f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5, f_5 = 6$ i $f_6 = 7$. Suma strumieni wynosi $f_{\Sigma} = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 = 24$. Średnia pojemność wobec tego wynosi $c_{sr} = 18/6 = 3$. Strumienie f_1, f_2 i f_3 przepływają bez przeszkód więc je odejmujemy od sumy strumieni przepływających przez krawędź $c = c - f_1 - f_2 - f_3 = 18 - 1 - 2 - 3 = 12$. Z początkowej liczby strumieni przepływających przez krawędź 3 przepływa w sposób swobodny, a pozostałe 3 nie. Nowa średnia przepustowość wynosi teraz $c_{sr} = c/3 = 12/3 = 4$ i teraz żaden ze strumieni nie może przepłynąć w sposób swobodny i wszystkie są ograniczane do wartości równej średniej przepustowości $f_3 = f_4 = f_5 = c_{sr} = 4$.

W momencie, gdy nie ma już strumieni mniejszych od średniej przepustowości krawędzi, a są tylko większe to muszą one ulec one ograniczeniu do wartości średniej przepustowości krawędzi w punkcie 5 algorytmu. Zapewnia to równoważne potraktowanie wszystkich strumieni ścieżek powiększających, ale pewne strumienie są mniej, inne bardziej, a jeszcze inne w ogóle nie są ograniczone w wartości strumienia przepływającego nimi, w stosunku do przypadku, gdyby nie było nałożonych ograniczeń w postaci przepustowości krawędzi. Dla wszystkich strumieni przepływających ścieżkami powiększającymi w każdej krawędzi należącej do ścieżki powiększającej następuje inne ograniczenie wartości płynącego strumienia i z tego względu przeszukuje się krawędzie w punkcie 6 algorytmu w celu wyznaczenia strumienia, dla którego nastąpiło największe zmniejszenie wartości. Ten strumień w danej krawędzi może przyjąć tylko tą najmniejszą wartość i nie może być większy, a jeśli jest większy w innych krawędziach to z pewnością może on zwolnić zajmowaną tam przepustowość krawędzi dla innych strumieni ścieżek powiększających. Z powyższego powodu w punkcie 7 algorytmu następuje zmniejszenie wartości strumienia z do najmniejszej wartości (minimalnej) we wszystkich krawędziach, przez które przepływa.

Jeżeli był taki strumień z , który został maksymalnie ograniczony w porównaniu z innymi strumieniami to wszystkie obliczenia związane z wyznaczeniem kolejnego strumienia, którego wartość zostanie maksymalnie ograniczona powtarza się i dlatego w punkcie 9 jest powrót do punktu 2 algorytmu. Pseudokod algorytmu wyznaczania maksymalnego strumienia wielo-towarowego przedstawia się następująco:

1. wyznacz algorytmem Dinica znajdowania maksymalnego przepływu w grafie G dla wszystkich par wierzchołków $s-t$ wspólną listę najkrótszych ścieżek powiększających P_{st} i ich strumienie f_{ijk} ($k \in P_{st}$) przepływające przez krawędzie (i,j) tworzące te ścieżki
2. dla każdej krawędzi grafu $e_{ij} \in E$ i każdej ścieżki k takiej, że $k \in P_{st}$
 - a. $f_{ij} = f_{ij} + f_{ijk}$

- b. $s_{ijk} = f_{ijk}$
 - c. jeśli $(f_{ijk} > 0)$ $(lp)_{ij} = (lp)_{ij} + 1$
3. $c_{ijsr} = c_{ij} / (lp)_{ij}$
4. while $(f_{ijk} < c_{ijsr})$
 - {
 - a. $f_{ij} = f_{ij} - f_{ijk}$
 - b. $(lp)_{ij} = (lp)_{ij} - 1$
 - c. $c_{ijsr} = c_{ij} / (lp)_{ij}$
 - }
5. jeśli $(f_{ijk} > c_{ijsr}) f_{ijk} = c_{ijsr}$
6. znajdź z takie, że $(s_{f_{ijz}} - f_{ijz}) \rightarrow \max$, $s_{f_{ijz}} \neq f_{ijz}$
7. dla ścieżki z : $s_{f_{ijz}} = f_{ijz}$
8. $f_{ijk} = s_{f_{ijk}}$
9. jeśli istnieje z wróć do 3

Całkowita złożoność czasowa algorytmu wynosi $O(n^3)$. Algorytm Dinica wykonuje się w czasie $O(mn^2)$, ale w wersji usprawnionej wykorzystującej przepustowość wierzchołków wykonuje się w czasie $O(n^3)$. W liniach 3, 5 i 6 algorytm działa w czasie $O(n^3)$.

3. PRZYKŁAD DZIAŁANIA ALGORYTMU

W celu przedstawienia jak działa algorytm na przykładzie w pierwszym należy przygotować graf do badania w postaci sieci planarnej. Sieć planarną grafu przedstawiono na rysunku 1. Wierzchołki z danej kolumny i i wiersza j mogą być tylko połączone krawędziami z wierzchołkami kolumny $i-1$ oraz $i+1$ oraz z wierszami $j-1$ oraz $j+1$. W rozważanym przykładzie sieć planarna składać się będzie z trzech wierszy i czterech kolumnach o numerach wierzchołków jak na rysunku 2. Maksymalne pojemności krawędzi przedstawione są przez macierz G grafu. Przyjmuje się występowanie w przepływie wielo-towarowym czterech strumieni s-t : 1-9, 2-11, 3-10 oraz 4-12.

Tabela 1. Macierz G maksymalnych pojemności krawędzi.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|----|----|----|---|---|---|----|----|----|
| 1 | - | 4 | - | 11 | 12 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 13 | 15 | 14 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 5 | - | - | 13 | 12 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 5 | - | 7 | - | 9 | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 | 8 | 6 | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 6 | 7 | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 10 | - | 12 |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 | - | 5 | 11 | 12 | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 | - | - | - | 10 |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 | - |

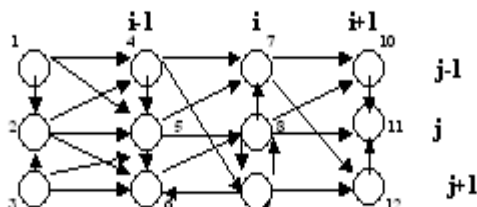
Dla sieci planarnej grafu z rysunku 2 i macierzy G maksymalnych pojemności jej krawędzi wyznaczono algorytmem Dinica następujące strumienie dla poszczególnych par s-t:

- 1) dla pary 1 – 9:

| | |
|-----------------|-----------------------|
| ścieżka 1-4-9 | strumień o wartości 9 |
| ścieżka 1-5-6-9 | strumień o wartości 5 |
| ścieżka 1-5-8-9 | strumień o wartości 5 |
| ścieżka 1-2-6-9 | strumień o wartości 2 |
- 2) dla pary 2-11:

| | |
|---------------------|-----------------------|
| ścieżka 2-5-8-11 | strumień o wartości 6 |
| ścieżka 2-4-7-10-11 | strumień o wartości 6 |
| ścieżka 2-4-9-12-11 | strumień o wartości 6 |

- | | | |
|-------------------|--------------------|-----------------------|
| 3) dla pary 3-10: | ścieżka 2-6-8-11 | strumień o wartości 6 |
| | ścieżka 3-5-8-10 | strumień o wartości 6 |
| | ścieżka 3-6-8-10 | strumień o wartości 5 |
| | ścieżka 3-5-7-10 | strumień o wartości 7 |
| | ścieżka 3-2-4-7-10 | strumień o wartości 3 |
| 4) dla pary 4-12: | ścieżka 4-9-12 | strumień o wartości 9 |
| | ścieżka 4-7-12 | strumień o wartości 7 |
| | ścieżka 4-5-7-12 | strumień o wartości 5 |



Rysunek 1. Siatka planarna grafu o 3 wierszach i 4 kolumnach.

Tabela 2. Wartości średnie pojemności krawędzi sieci planarnej.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|---|---|----|----|----|---|---|---|----|----|----|
| 1 | - | 4 | - | 11 | 6 | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 4 | 15 | 7 | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 5 | - | - | 6 | 12 | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 5 | - | 3 | - | 3 | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 | 4 | 2 | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 3 | 3 | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3 | - | 6 |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 | - | 5 | 5 | 6 | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 | - | - | - | 5 |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 | - |

Dla krawędzi (1,2), (1,4), (1,5), (2,5), (2,6), (3,2), (3,6), (4,5), (5,6), (8,7), (8,9), (8,11), (9,8), (10,11) oraz (12,11) wartość strumieni przepływających jest mniejsza lub równa wartości średniej przepustowości danej krawędzi, a więc strumienie mogą przez te krawędzie przepływać w sposób nieograniczony.

Dla krawędzi (2,4) jeden ze strumieni ma mniejszą wartość niż średnia przepustowość krawędzi, więc zwalnia on część przepustowości dla pozostałych strumieni. Mamy $13 - 3 = 10$ (przepustowość krawędzi minus strumień mniejszy niż średnia przepustowość krawędzi) oraz $10/2 = 5$, więc nowa średnia przepustowość dla pozostałych dwóch strumieni wynosi 5 i do tej wartości zostają ograniczone te dwa strumienie. Przez krawędź (2,4) przepływają więc strumienie o wartościach 3, 5 i 5. Podobnie jest dla krawędzi (7,10) tutaj swobodnie przepływa strumień o wartości 3, więc nowa średnia przepustowość wynosi $10 - 3 = 7$ oraz $7/2 = 3,5$ czyli 3 i wszystkie strumienie przepływające przez krawędź (7,10) mają następujące wartości 3, 3 i 3.

Dla krawędzi (4,7) wszystkie trzy strumienie o wartościach 6, 3 i 7 ponieważ są większe od średniej przepustowości krawędzi zostają ograniczone do wartości średniej i wynoszą odpowiednio 2, 2 i 2. Podobnie dla krawędzi (5,7) strumienie przepływające zostają ograniczone do wartości 4 i 4, dla krawędzi (5,8) do wartości 2, 2 i 2, dla krawędzi (6,8) do wartości 3 i 3, dla krawędzi (4,9) do wartości 3, 3 i 3 i dla krawędzi (9,12) do wartości 5 i 5.

Tabela 3. Wartości średnich pojemności oraz strumieni przepływających przez krawędzie sieci planarnej.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|------|---|------------------|----------|--------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------------|--------------|
| 1 | - | 2[4] | - | 9 [11] | 5,5[6,6] | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 6,6,3 [4,4,4] | 6 [15] | 2,6 [7,7] | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 3[5] | - | - | 6,7[6,6] | 5[12] | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 5 [5] | - | 6,3,7 [2,2,2] | - | 9,6,9 [3,3,3] | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 [5] | 7,5 [4,4] | 5,6,6 [2,2,2] | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 6,5[3,3] | 5,2[3,3] | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6,7,3 [3,3,3] | - | 7,5 [6,6] |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 [5] | - | 5 [5] | 6,5 [5,5] | 6,6 [6,6] | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 [4] | - | - | - | 6,9 [5,5] |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 [6] | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 [6] | - |

Dla krawędzi (4,7) wszystkie trzy strumienie o wartościach 6, 3 i 7 ponieważ są większe od średniej przepustowości krawędzi zostają ograniczone do wartości średniej i wynoszą odpowiednio 2, 2 i 2. Podobnie dla krawędzi (5,7) strumienie przepływające zostają ograniczone do wartości 4 i 4, dla krawędzi (5,8) do wartości 2, 2 i 2, dla krawędzi (6,8) do wartości 3 i 3, dla krawędzi (4,9) do wartości 3, 3 i 3 i dla krawędzi (9,12) do wartości 5 i 5.

Dla krawędzi (6,9) strumień o wartości 2 przepływa bez ograniczenia wartości i nowa wartość przepustowości krawędzi wynosi $7 - 2 = 5$, a więc i drugi strumień może przepłynąć bez ograniczenia jego wartości. Podobnie jest dla krawędzi (3,5) strumień o wartości 6 przepływa bez ograniczenia i nowa przepustowość $13 - 6 = 7$ pozwala drugiemu strumieniowi o wartości 7 również przepłynąć bez ograniczenia jego wartości. Podobnie dla krawędzi (7,12) jest swobodny przepływ strumienia o wartości 5 i w następstwie o wartości 7 ($12 - 5 = 7$), a także dla krawędzi (8,10) swobodnie przepływa strumień o wartości 5 i w następstwie o wartości 6 ($11 - 5 = 6$). Ograniczenie wartości strumieni przepływających przez poszczególne krawędzi prowadzi do ograniczenia wartości strumieni dla poszczególnych par towarów s-t i tak zmniejsza się wartość strumieni:

- 1) dla pary 1 – 9:
 - ścieżka 1-4-9 z wartości 9 do 3
 - ścieżka 1-5-8-9 z wartości 5 do 2
- 2) dla pary 2-11:
 - ścieżka 2-5-8-11 z wartości 6 do 2
 - ścieżka 2-4-7-10-11 z wartości 6 do 2
 - ścieżka 2-4-9-12-11 z wartości 6 do 3
 - ścieżka 2-6-8-11 z wartości 6 do 3
- 3) dla pary 3-10:
 - ścieżka 3-5-8-10 z wartości 6 do 2
 - ścieżka 3-6-8-10 z wartości 5 do 3
 - ścieżka 3-5-7-10 z wartości 7 do 3
 - ścieżka 3-2-4-7-10 z wartości 3 do 2
- 4) dla pary 4-12:
 - ścieżka 4-9-12 z wartości 9 do 3
 - ścieżka 4-7-12 z wartości 7 do 2
 - ścieżka 4-5-7-12 z wartości 5 do 4

Wartości strumieni płynących ścieżkami 1-5-6-9 oraz 1-2-6-9 nie uległy ograniczeniu, a największemu zaś ograniczeniu uległ strumień 1-4-9 oraz 4-9-12 z wartości 9 do 3 i takie wartości na stałe przypisujemy tym strumieniom zaś całą procedurę powtarzamy i obliczamy nowe wartości strumieni ze względu na to, że obniżenia wartości strumienia 1-4-9 oraz 4-9-12

mogło udostępnić innym strumieniom wcześniej zajmowaną przez nie przepustowość w krawędziach, przez które przepływają. Wartość strumienia 1-4-9 została najmocniej ograniczona w krawędzi 4-9 i zwolnienie części przepustowości pierwotnie zajmowanej następuje w krawędzi 1-4, ale nie ma to w naszym przypadku znaczenia, gdyż żaden inny strumień nie może skorzystać, ze zwalnianej przepustowości w krawędzi 1-4, gdyż tylko strumień 1-4-9 przez nią przepływa. Wartość strumienia 4-9-12 została najmocniej ograniczona w krawędzi 4-9, a więc w krawędzi (9,12) strumień ten zwolnił część średniej przepustowości krawędzi, która wynosiła 5, jednakże drugi strumień przepływający przez krawędź (9,12) a mianowicie 2-4-9-12-11 nie może z tej dodatkowej przepustowości skorzystać, gdyż też jest ograniczany średnią przepustowością krawędzi (4,9) wynoszącą 3.

Tabela 4. Wartości aktualnych przepustowości oraz strumieni przepływających przez krawędzie sieci.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|------|---|------------------|-----------|--------------|------------------|------------------|------------------|------------------|--------------|--------------|
| 1 | - | 2[4] | - | 3 [11] | 5,5[6,6] | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 6,3,3 [7,3,3] | 6 [15] | 2,6 [7,7] | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 3[5] | - | - | 6,7[6,7] | 5[12] | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 5 [5] | - | 6,3,7 [2,2,2] | - | 3,3,3 [3,3,3] | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 [5] | 7,5 [4,4] | 5,6,6 [2,2,2] | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 6,5[3,3] | 5,2[5,2] | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6,7,3 [3,3,3] | - | 7,5 [7,5] |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 [5] | - | 5 [5] | 6,5 [6,5] | 6,6 [6,6] | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 [4] | - | - | - | 3,3 [5,5] |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 6 [6] | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3 [6] | - |

Ograniczony do wartości 3 strumień 2-4-9-12-11 zwalnia przepustowości krawędzi (2,4) oraz (12,11). Zwolniona przepustowość w krawędzi (12,11) jest bez znaczenia, gdyż przez tą krawędź przepływa jeden właśnie ten strumień i wobec tego, żaden inny nie może skorzystać ze zwolnionej przepustowości, gdyż nie istnieje. W krawędzi zaś (2,4) mamy teraz następujące strumienie 2-4-7-10-11 o wartości 6, ograniczony do wartości 3 przez krawędź (4,9) strumień 2-4-9-12-11 oraz strumień 3-2-4-7-10 o wartości 3. Widać więc wyraźnie, że strumień 2-4-7-10-11 o wartości 6 skorzystał ze zwolnionej części przepustowości krawędzi (2,4), gdyż nowa przepustowość $13 - 3 - 3 = 7$ pozwala na przepłynięcie tego strumienia bez ograniczeń, gdy wcześniejsza ograniczała jego wartość do 5, ale pod warunkiem, że wartość tego strumienia 2-4-7-10-11 nie jest ograniczana przepustowością innych krawędzi wchodzących w skład ścieżki, którą przepływa. Ograniczenia w tej chwili wartości strumieni występują w krawędziach (4,7), (5,7), (5,8), (6,8) oraz (7,10):

| | |
|---------------------|-------------------|
| ścieżka 1-5-8-9 | z wartości 5 do 2 |
| ścieżka 2-5-8-11 | z wartości 6 do 2 |
| ścieżka 2-4-7-10-11 | z wartości 6 do 2 |
| ścieżka 2-6-8-11 | z wartości 6 do 3 |
| ścieżka 3-5-8-10 | z wartości 6 do 2 |
| ścieżka 3-6-8-10 | z wartości 5 do 3 |
| ścieżka 3-5-7-10 | z wartości 7 do 3 |
| ścieżka 3-2-4-7-10 | z wartości 3 do 2 |
| ścieżka 4-7-12 | z wartości 7 do 2 |
| ścieżka 4-5-7-12 | z wartości 5 do 4 |

Maksymalnie wartość strumienia zmniejsza się o 5 dla ścieżki 4-7-12 ze względu na ograniczenie narzucane przez krawędź (4,7). W krawędzi (7,12) zwalniana jest przepustowość, ale nie ma to znaczenia, gdyż drugi strumień płynący tą krawędzią nie może zwiększyć swojej wartości, gdyż jest ograniczany przepustowością krawędzi (5,7). Krawędź (4,7) ogranicza też wartość strumieni 3-2-4-7-10 oraz 2-4-7-10-11, które zwalniają w części zajmowane uprzednio przepustowości krawędzi wchodzących w skład ścieżek, którymi przepływają, a szczególnie dotyczy to krawędzi (7,10) i strumienia 3-5-7-10, który nie musi być teraz ograniczany do 3 przez krawędź (7,10), tylko do 5 (10-2-3=6), a faktycznie jest ograniczany do 4 ze względu na krawędź (5,7). Jeśli strumienie będą przetwarzane jeden po drugim pojawi się nam nowa przepustowość krawędzi (4,7) dla strumienia 3-2-4-7-10. Ograniczenia teraz wartości strumieni występują w krawędziach (5,7), (5,8), (6,8) oraz (7,10).

Tabela 5. Wartości aktualnych przepustowości oraz strumieni przepływających przez krawędzie sieci.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|------|---|---------------|----------|-----------|---------------|--------------|---------------|---------------|----------|-----------|
| 1 | - | 2[4] | - | 3 [11] | 5,5[6,6] | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 2,3,3 [7,3,3] | 6 [15] | 2,6 [7,7] | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 3[5] | - | - | 6,7[6,7] | 5[12] | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 5 [5] | - | 2,2,3 [2,2,3] | - | 3,3,3 [3,3,3] | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 [5] | 7,5[4,4] | 5,6,6[2,2,2] | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 6,5[3,3] | 5,2[5,2] | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2,7,3 [2,5,3] | - | 2,5 [7,5] |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 [5] | - | 5 [5] | 6,5[6,5] | 6,6[6,6] | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 [4] | - | - | - | 3,3[5,5] |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2 [6] | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3 [6] | - |

Tabela 6. Wartości aktualnych przepustowości oraz strumieni przepływających przez krawędzie sieci.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----|---|-------|---|---------------|-----------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------|-----------|
| 1 | - | 2 [4] | - | 3 [11] | 2,5 [6,6] | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | - | - | 2,3,3 [7,3,3] | 2 [15] | 2,3 [7,7] | - | - | - | - | - | - |
| 3 | - | 3 [5] | - | - | 2,4 [6,7] | 5 [12] | - | - | - | - | - | - |
| 4 | - | - | - | - | 4 [5] | - | 2,2,3 [2,2,3] | - | 3,3,3 [3,3,3] | - | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | 5 [5] | 4,4 [4,4] | 2,2,2 [2,2,2] | - | - | - | - |
| 6 | - | - | - | - | - | - | - | 3,3[3,3] | 5,2[5,2] | - | - | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2,4,3 [2,5,3] | - | 2,4 [7,5] |
| 8 | - | - | - | - | - | - | 5 [5] | - | 2 [5] | 2,3[6,5] | 2,3[6,6] | - |
| 9 | - | - | - | - | - | - | - | 4 [4] | - | - | - | 3,3[5,5] |
| 10 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 2 [6] | - |
| 12 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | 3 [6] | - |

Zmniejsza się wartość strumieni:

| | |
|------------------|-----------------------|
| ścieżka 1-5-8-9 | z wartości 5 do 2 |
| ścieżka 2-5-8-11 | z wartości 6 do 2 max |
| ścieżka 2-6-8-11 | z wartości 6 do 3 |
| ścieżka 3-5-8-10 | z wartości 6 do 2 max |
| ścieżka 3-6-8-10 | z wartości 5 do 3 |
| ścieżka 3-5-7-10 | z wartości 7 do 4 |
| ścieżka 4-5-7-12 | z wartości 5 do 4 |

Krawędź (5,8) maksymalnie, gdyż o 4, ogranicza wartość strumieni 2-5-8-11 oraz 3-5-8-10 i ma też decydujący wpływ na strumień 1-5-8-9 i po uwzględnieniu tego ograniczenia w pozostałych strumieniach krawędź (6,8) ogranicza wartość strumieni 2-6-8-11 oraz 3-6-8-10 do 3, a krawędź (5,7) ogranicza wartość strumieni 3-5-7-10 oraz 4-5-7-12 do 4.

Mamy więc ograniczone już wszystkie strumienie wyznaczone algorytmem Dinica dla wszystkich par s-t wielo-towarowego strumienia i suma tych strumieni tworzy maksymalny strumień wielo-towarowy.

4. WYNIKI BADAŃ TESTOWYCH

Aby przeprowadzić testy na opracowanym i zaimplementowanym algorytmie wygenerowano szereg grafów tak by tworzyły one siatkę planarną poprzez umieszczenie wierzchołków grafów w węzłach na przecięciu wierszy i kolumn siatki. Występowanie krawędzi łączącej dwa sąsiednie wierzchołki w węzłach jest zależne od parametru q . Parametr q przyjmuje wartości z zakresu od 0 do 1 i z takim prawdopodobieństwem istnieje krawędź łącząca dwa wierzchołki w sieci planarnej.

Parametr q ma bezpośredni wpływ na liczbę ścieżek powiększających strumień wielo-towarowy przepływający przez graf. W tabeli 7 zawarto zależność czasu działania algorytmu i liczby ścieżek powiększających od gęstości krawędziowej q , które to obie wielkości maleją wraz z malejącą gęstością krawędziową. Testy przeprowadzono dla przepływu dwu-towarowego ($s-t = 20$) oraz przy siatce o 10 wierszach i 10 kolumnach ($n_1 \times n_2 = 10 \times 10$).

Tabela 7. Wpływ gęstości występowania krawędzi q na czas obliczeń $s-t=2$, $n_1 \times n_2=10 \times 10$

| | | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Gęstość krawędziowa q | 1.0 | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.6 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |
| Liczba ścieżek powiększających | 1493 | 1404 | 1064 | 1108 | 554 | 291 | 223 | 159 | 36 |
| Czas działania algorytmu t [sek] | 67 | 63 | 47 | 49 | 24 | 12 | 9 | 7 | 1,5 |

Ze względu na to, że rozwiązywanym problemem jest przepływ wielo-towarowy interesujący jest wpływ liczby towarów na działanie algorytmu i na liczbę ścieżek powiększających maksymalny strumień. W obu przypadkach zależność ta jest liniowa, a wyniki badań tego wpływu zawarto w tabeli 8. Testy badawcze przeprowadzono przy gęstości krawędziowej $q = 1.0$ i siatce o 5 kolumnach i 5 wierszach ($n_1 \times n_2 = 5 \times 5$).

Tabela 8. Wpływ liczby towarów s-t na czas obliczeń algorytmu $q=1.0$, $n_1 \times n_2=5 \times 5$

| | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Liczba towarów s-t | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Liczba ścieżek powiększających | 1049 | 2820 | 3927 | 7963 | 12778 | 13215 | 17126 | 18805 |
| Czas działania algorytmu t [sek] | 1,3 | 5 | 11 | 27 | 44 | 50 | 59 | 60 |

Tabela 9. Wpływ liczby wierzchołków grafu n na czas działania algorytmu $q=1.0$, $s-t=5$

| | | | | | |
|------------------------------------|------|------|-------|-------|-------|
| Wymiar problemu $n_1 \times n_2$ | 4x4 | 5x5 | 6x6 | 7x7 | 8x8 |
| Liczba wierzchołków grafu n | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |
| Liczba ścieżek powiększających | 2512 | 3927 | 11584 | 16639 | 36296 |
| Czas działania algorytmu t [sek] | 1,5 | 11 | 87 | 319 | 1599 |

Ostatni przeprowadzony test dotyczył badania wpływu liczby wierzchołków grafu w siatce planarnej na działanie algorytmu. Wraz ze wzrostem wymiaru problemu wzrasta zarówno liczba ścieżek powiększających maksymalny strumień wielo-towarowy jak i czas działania algorytmu, który to czas działania wykazuje liniową zależność w stosunku do liczby ścieżek powiększających. Wyniki badań zawarto w tabeli 9. Badania przeprowadzono przy pięcio-towarowym strumieniu ($s-t = 5$) i gęstości krawędziowej równej jeden ($q = 1.0$).

5. ZAKOŃCZENIE

W pracy przedstawiono wielomianowy algorytm wyznaczania maksymalnego całkowitoliczbowego przepływu wielo-towarowego w grafach skierowanych o strumieniach podzielnych. Algorytm ten w zastosowaniu do grafów z uwzględnieniem kosztów przypisanych ich krawędziom może po niewielkich modyfikacjach być wykorzystywany do wyznaczania maksymalnego przepływu wielo-towarowego o minimalnym koszcie.

LITERATURA

- [1] Ford L.R, Fulkerson D.R.: *Flows in networks*, Princeton Press, Princeton, NJ 1962.
- [2] Dinic E.A.: *Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation*, Sov Math Dok 11, 1970, 1277-80.
- [3] Chiou S.W.: *Faster combinatorial approximation algorithms for multi-commodity flow problems and its applications*, Workshop on Algorithms and Computational Molecular Biology, International Computers Symposium, Taiwan 2002.
- [4] Leighton T., Makedon F., Plotkin S., Tardos C., Tragoudas S.: *Fast approximation algorithms for multi-commodity flow problem*, Journal of Computer and Systems Science, 50, 228-243,1995.
- [5] Goldberg A., Oldham J.D., Plotkin S., Stein C.: *An implementation of a combinatorial approximation algorithm for minimum-cost multi-commodity flow*, Report No. CS-TR-97-1600, Department of Computer Science Stanford University, California 1997.
- [6] Plotkin S.A., Shmoys D.B., Tardos E.: *Fast approximation algorithms for fractional packing and covering problems*, Mathematics of Operational Research, 20(2), 257-301, 1995.
- [7] Radzik T.: *Experimental study of a solution method for multi-commodity flow problems*, Workshop on Algorithm Engineering and Experiments, 2000.
- [8] Hu T.C.: *Multi-commodity network flow*, Oper. Res. 11,344-360 1963.
- [9] Sedeno-Noda A., Gonzalez-Martin C., Alonso-Rodriguez S.: *A new strategy for the undirected two-commodity maximum flow problem*, Raport Departamento de Estadística, Investigacion Operativa y Computation, Universidad de La Laguna, Tenerife Spain 2008.
- [10] Ahuja R., Magnanti T., Orlin J.B.: *Network flows*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1993.
- [11] Kleinberg J., Rabani Y., Tardos E.: *Fairness in routing and load balancing*, In Proc. of 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1999.
- [12] Karp R.: *On the computational complexity of combinatorial problems*, Networks, vol5.no1.,45-68, 1975.
- [13] Wang I-Lin: *Shortest paths and multicommodity network flow*, Ph.D dissertation, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology 2003.
- [14] Costa M.Ch., Letocart L., Roupin F.: *Minimal multicut and maximal integer multiflow: A survey*, European Journal of Operation Research 162 (2005), 55-69.
- [15] Barnhart C., Hane C., Vance P.: *Using branch-and-price to solve origin-destination integer multicommodity flow problem*, Operations Research 32(3), 1998, 208-220.
- [16] Costa M.C., Hertz A., Mittaz M.: *Bounds and heuristics for the shortest capacitated paths problem*, Journal of heuristics 8 (4), 2002, 449-466.
- [17] Costa M.C., Monclar F.R., Zrikem M.: *Variable neighborhood search for the optimization of cable layout problem*, Jour. of Intelligent Manufacturing 13 (5), 2002, 353-365.

AN ALGORITHM FOR FINDING AN MULTI-COMMODITY MAXIMUM FLOW IN A DIRECTED GRAPH

Abstract

In this paper algorithm for maximum multi-commodity flow problem, which is based on Dinic's algorithm for maximum flow problem, is presented. Maximum flow is computed for each transported commodity between s-t vertices throughout the network graph using Dinic's algorithm. Each commodity could be transported by different flows moving throughout different paths. The idea of presented algorithm rely on balancing of all flows by using calculated current capacity for each edge in network.

Keywords: integer multi-commodity flow problem, directed graph