

SZCZEŚNIAK Wacław<sup>1</sup>  
ATAMAN Magdalena<sup>1</sup>

## DYNAMIKA SZTYWNYCH KUL W RUCHU ZŁOŻONYM

*W referacie przedstawiono rozwiązania wybranych trudniejszych zadań dotyczących dynamiki dwóch sztywnych kul w ruchu złożonym. Te nietypowe zadania są sformułowane, bez podania rozwiązań, w starych, trudnodostępnych pozycjach literatury [1-4] i były przedmiotem egzaminów na uniwersytetach angielskich w końcu XIX wieku.*

## DYNAMICS OF RIGID SPHERES IN COMPOUND MOTION

*In the paper solutions of selected problems of dynamics of rigid spheres in compound motion are presented. Formulation of these examination problems, date the end of the nineteenth century, one can find in the old books [1-4].*

### 1. WSTĘP

Zadania z dynamiki analitycznej dotyczące układu sztywnych kul w ruchu złożonym sprawiają wiele kłopotów przy ich rozwiązaniu. Prezentowane zadania są zawarte w bardzo starych, trudnodostępnych pozycjach literatury [1-4] i pochodzą z tematów egzaminacyjnych z końca XIX wieku na uniwersytetach angielskich. Z uwagi na ograniczoną objętość referatu w opracowaniu podamy pełne rozwiązanie dwóch zadań traktując, że inne można rozwiązać wykorzystując idee zawarte w tych przykładach.

### 2. PUNKT MATERIALNY I SZTYWNA KULA WEWNĄTRZ PUSTKI KULISTEJ ZAWARTEJ W SZKLANYM SZEŚCIANIE

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi na rysunku 1 rozważamy szklany sześcián z wydrążoną centralnie kulistą pustką o danym promieniu  $R$ . Masa całkowita sześciánu wraz z pustką niechaj wynosi  $M$ . W najniższym położeniu wydrążonej pustki kulistej znajduje się naprzód punkt materialny o masie  $m$ . Sześcián spoczywa na idealnie gładkiej, poziomej, bez tarciowej powierzchni pustki. Jaką poziomą prędkość początkową  $V$  należy nadać sześciánowi, aby punkt materialny  $m$  obiegał pustkę kulistą bez oderwania się od niej

---

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,  
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;  
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

w żadnym punkcie w tym w najwyższym punkcie pustki. Zadanie tak sformułowane jest wstępem do rozwiązania zasadniczego zadania ze sztywną kulą wewnątrz pustki.

Ruch punktu materialnego  $m$  będzie określony kątem  $\varphi$ . Jak pokazują oznaczenia na rysunku 2 na punkt materialny  $m$  działają następujące siły: siła ciężkości  $mg$ , styczna siła bezwładności  $mR\ddot{\varphi}$ , normalna odśrodkowa siła bezwładności  $mR\dot{\varphi}^2$  oraz siła bezwładności wywołana naciskiem  $N$  na szklany sześcián o masie  $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} M$  równa

$$B_m = ma_M, \quad N \sin \varphi = M a_M \quad \leftrightarrow \quad a_M = \frac{N \sin \varphi}{M}, \quad B_M = \frac{m}{M} N \sin \varphi. \quad (1)$$

Zapisujemy następnie dwa równania ruchu punktu materialnego na kierunek stycznej i normalnej do powierzchni pustki kulistej. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \sum F_t = 0 &\quad \rightarrow \quad mR\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi + \frac{m}{M} N \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \sum F_n = 0 &\quad \rightarrow \quad mR\dot{\varphi}^2 - N - \frac{m}{M} N \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Z kinematyki ruchu obrotowego znane są wzory:

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}. \quad (3)$$

Uwzględniając (3) z równania (2)<sub>1</sub> wyznaczmy nieznaną nacisk punktu materialnego  $N$  na idealnie gładką powierzchnię pustki, aby następnie podstawić go do równania (2)<sub>2</sub> celem jego wyeliminowania:

$$\begin{aligned} N &= - \frac{M \left( R \omega \frac{d\omega}{d\varphi} + g \sin \varphi \right)}{\sin \varphi \cos \varphi}, \\ 2R \omega \frac{d\omega}{d\varphi} (M + m \sin^2 \varphi) + 2mR \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi &= - 2(m + M) g \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Równanie (4)<sub>2</sub> przemnożyliśmy stronami przez 2. Następnie równanie to całkujemy stronami wykorzystując w pierwszym jego składniku wzór całkowania przez części. Mamy zatem:

$$\int u v' = u v - \int u' v.$$

$$2R \frac{\omega^2}{2} (M + m \sin^2 \varphi) - 2m \int 2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + 2m \int 2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi =$$

$$= C + 2g(M + m) \cos \varphi,$$

$$R \omega^2 (M + m \sin^2 \varphi) = C + 2g(M + m) \cos \varphi. \quad (5)$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (5)<sub>3</sub> wyznaczymy z warunku początkowego przy  $\varphi = 0$  mamy  $\omega = \frac{V}{R}$ . Otrzymujemy stąd:

$$C = M \frac{V^2}{R} - 2g(M + m). \quad (6)$$

Zatem równanie (5)<sub>3</sub> zapisujemy w następujący sposób:

$$2R \omega^2 (M + m \sin^2 \varphi) = M \frac{V^2}{R} - 2g(M + m)(1 - \cos \varphi). \quad (7)$$

Równanie (7) jest zasadniczym przy rozwiązaniu tego zadania. Zapewnienie nieoderwania się punktu materialnego  $m$  od gładkiej pustki kulistej w jej najwyższym punkcie przy  $\varphi = \pi$  prowadzi do równania (2)<sub>2</sub> w którym należy przyjąć  $N = 0$ , a zatem:

$$R \omega^2 = -g \cos \varphi, \quad \varphi = \pi \rightarrow R \omega^2 = -g. \quad (8)$$

Wstawiając do równania (7) kąt  $\varphi = \pi$  oraz związek (8) otrzymujemy:

$$Mg + 4(M + m)g = M \frac{V^2}{R} \Leftrightarrow V^2 = Rg \sqrt{5 + 4 \frac{m}{M}},$$

$$V = \sqrt{Rg \left(5 + 4 \frac{m}{M}\right)} = \sqrt{Rg \frac{(5M + 4m)}{M}}. \quad (9)$$

Wzór (9) stanowi odpowiedź tego stosunkowo trudnego zadania. W szczególnym przypadku  $M = m$ , ze wzoru (9) wynika  $V = \sqrt{9gR}$ , co różni się od przypadku nieruchomego sześcienu gdzie będziemy mieli  $V = \sqrt{5gR}$ . Oczywiście w takim przypadku wektor prędkości  $V$  jest przyłożony poziomo do punktu materialnego  $m$  w jego najniższym punkcie pustki przy nieruchomym sześcienu.

W przypadku sztywnej kuli w ruchu złożonym, o masie  $m$  i promieniu  $r$  spoczywającej w najniższym punkcie idealnie gładkiej pustki kulistej o promieniu  $R$  tok rozwiązania jest identyczny jak w przypadku punktu materialnego. Również i tutaj będziemy chcieli wyznaczyć taką poziomą prędkość  $V$ , która nadana do szklanego sześciangu spoczywającego na gładkiej poziomej podłodze wystarczy aby kula zatoczyła pełny krąg po gładkiej pustce nie odrywając się od niej w żadnym punkcie. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 3 układ sił działających w środku kuli  $O_1$  prowadzi do dwóch równań równowagi sumy miar rzutów sił na osie  $\tau$  i  $n$ :

$$\begin{aligned}\sum F_\tau = 0 &\rightarrow m(R-r)\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi + \frac{m}{M} N \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \sum F_n = 0 &\rightarrow m(R-r)\dot{\varphi}^2 - N - \frac{m}{M} N \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi = 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Eliminując z układu (10) nacisk  $N$ , wykorzystując (3)-(5) otrzymujemy równanie analogiczne do (5)<sub>3</sub>. Mamy zatem:

$$(R-r)\omega^2 (M + m \sin^2 \varphi) = C + 2g(M+m) \cos \varphi. \quad (11)$$

Stałą całkowania  $C$  w równaniu (11) wyznaczmy z warunku początkowego przy  $\varphi = 0$  mamy  $\omega = \frac{V}{R-r}$ , stąd otrzymujemy:

$$C = M \frac{V^2}{R-r} - 2g(M+m). \quad (12)$$

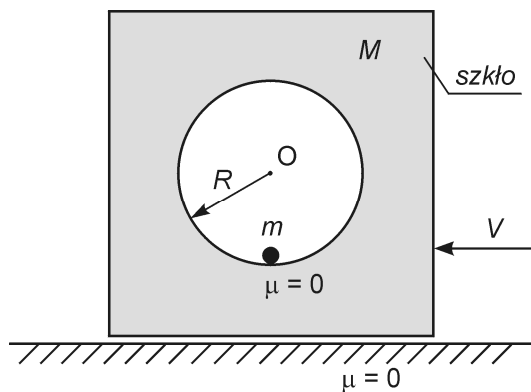
Wstawiając  $C$  do równania (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(R-r)\omega^2 (M + m \sin^2 \varphi) &= M \frac{V^2}{R-r} - 2g(M+m) + 2g(M+m) \cos \varphi, \\ \varphi = \pi &\rightarrow g = (R-r)\omega^2 \quad \omega^2 = \frac{g}{R-r}.\end{aligned}\quad (13)$$

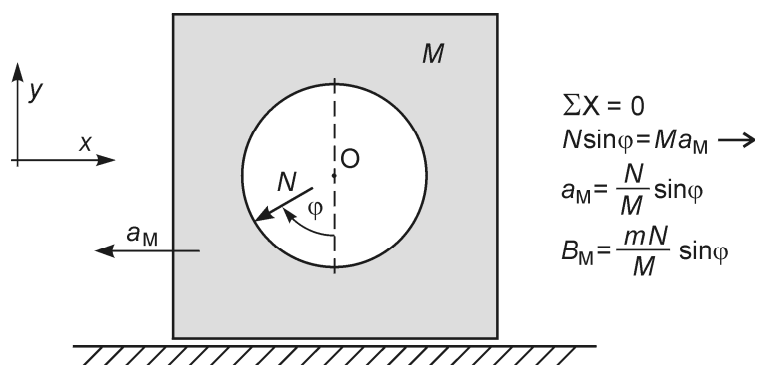
Wstawiając do równania (13)<sub>1</sub> kąt  $\varphi = \pi$  oraz związek (13)<sub>2</sub> otrzymujemy:

$$\begin{aligned}Mg + 4(M+m)g &= M \frac{V^2}{R-r} \Leftrightarrow V^2 = (R-r)g \sqrt{5 + 4 \frac{m}{M}}, \\ V &= \sqrt{(R-r)g \left(5 + 4 \frac{m}{M}\right)} = \sqrt{(R-r)g \frac{(5M+4m)}{M}}.\end{aligned}\quad (14)$$

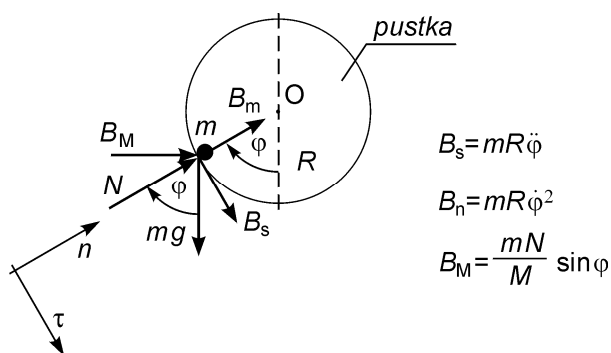
Wzór (14)<sub>3</sub> stanowi odpowiedź w zadaniu z kulą.



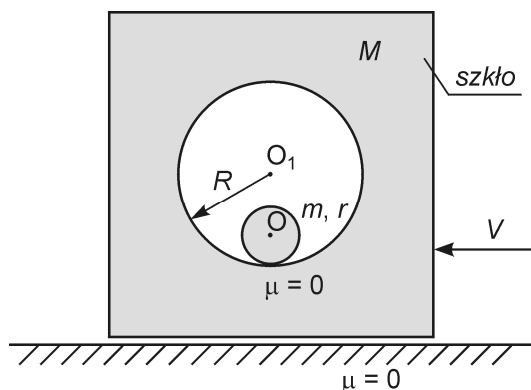
Rys. 1. Schemat dynamiczny rozwiązywanego zadania w przypadku punktu materialnego w pustce kulistej



Rys. 2. Układ sił działających na szklany sześcian



Rys. 3. Układ sił działających na punkt materialny



Rys. 4. Schemat dynamiczny sztywnej kuli w pustce kulistej

### 3. PUNKT MATERIALNY I SZTYWNA KULA WEWNĄTRZ PUSTKI ELIPTYCZNEJ ZAWARTEJ W SZKLANYM PROSTOPADŁOŚCIANIE

W przypadku prostopadłościanu lub sześcienu z pustką w formie walca eliptycznego postępowanie w rozwiązaniu jest prawie takie samo jak w przypadku pustki kulistej. Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 4 rozważamy szklany prostopadłościan lub sześcien z wydrążoną centralnie pustką eliptyczną o danych półosiach elipsy  $a$  i  $b$  masa całkowita prostopadłościanu wraz z pustką niechaj wynosi  $M$ . W najniższym położeniu wydrążonej pustki eliptycznej znajduje się naprzód punkt materialny o masie  $m$ . Prostopadłościan spoczywa na idealnie gładkiej, poziomej, bez tarciowej powierzchni pustki. Jaką poziomą prędkość początkową  $V$  należy nadać prostopadłościanowi, aby punkt materialny  $m$  obiegił pustkę eliptyczną bez oderwania się od niej w żadnym punkcie w tym w najwyższym punkcie pustki. Zadanie tak sformułowane jest wstępem do rozwiązania zasadniczego zadania ze sztywną kulą wewnątrz pustki.

Ruch punktu materialnego  $m$  będzie określony kątem  $\varphi$ . Jak pokazują oznaczenia na rysunku 2 na punkt materialny  $m$  działają następujące siły: siła ciężkości  $mg$ , styczna siła bezwładności  $m\rho\ddot{\varphi}$ , normalna odśrodkowa siła bezwładności  $m\rho\dot{\varphi}^2$  oraz siła bezwładności wywołana naciskiem  $N$  na szklany sześcien o masie  $\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} M$  równa

$$B_m = ma_M, \quad N \sin \varphi = M a_M \quad \leftrightarrow \quad a_M = \frac{N \sin \varphi}{M}, \quad B_M = \frac{m}{M} N \sin \varphi. \quad (15)$$

Zapisujemy następnie dwa równania ruchu punktu materialnego na kierunku stycznej i normalnej do powierzchni pustki kulistej. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}\sum F_t = 0 &\rightarrow m\rho\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi + \frac{m}{M} N \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ \sum F_n = 0 &\rightarrow m\rho\dot{\varphi}^2 - N - \frac{m}{M} N \sin^2 \varphi + mg \cos \varphi = 0.\end{aligned}\quad (16)$$

Z kinematyki ruchu obrotowego znane są wzory:

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}.\quad (17)$$

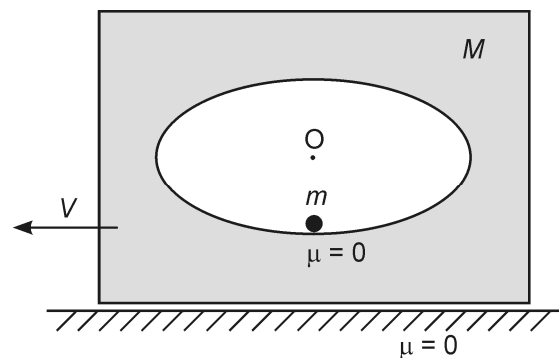
Następnie postępując podobnie jak rozdziale drugim jedyną zmienną jest tutaj zmienny promień pustki eliptycznej  $\rho$ . W najwyższym punkcie elipsy promień krzywizny wynosi  $\rho = \frac{a^2}{b}$  i jest promieniem ściśle stycznym. Zatem odpowiedzi (9) w przypadku punktu materialnego są następujące:

$$V = \sqrt{\frac{a^2}{b} g \left(5 + 4 \frac{m}{M}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{b} g \frac{(5M + 4m)}{M}}.\quad (18)$$

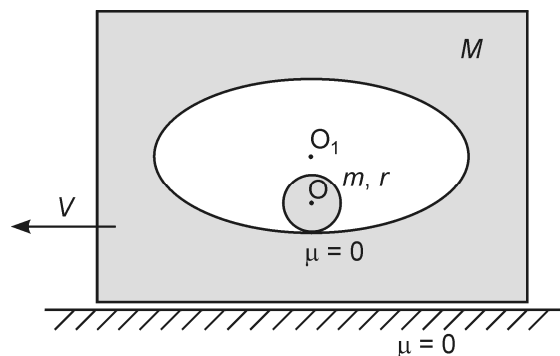
W przypadku sztywnej kuli o promieniu  $r$  odpowiedź (18) jest analogiczna do (14):

$$V = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b} - r\right) g \left(5 + 4 \frac{m}{M}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b} - r\right) g \frac{(5M + 4m)}{M}}.\quad (19)$$

Prędkość górnej kuli  $v_1$  w momencie oderwania się kuli dolnej obliczymy ze wzoru (2).



Rys. 5. Schemat dynamiczny w przypadku punktu materialnego w pustce elipsoidalnej



Rys. 6. Schemat dynamiczny w przypadku kuli w pustce elipsoidalnej

#### 4. WNIOSKI

W referacie podano szczegółowe rozwiązania dotyczące punktu materialnego, sztywnej kuli w gładkiej pustce kulistej lub eliptycznej wydrążonej w szklanym, ruchomym sześcianie lub prostopadłościanie. Istota rozwiązania pełnego obiegu bez oderwania się punktu materialnego lub kuli w ruchu złożonym wywołanym nadaną prędkością  $V$ , przyłożoną poziomo do sześcianu lub prostopadłościanu spoczywającego na idealnie gładkim, sztywnym, poziomym podłożu polega na analizie równań ruchu w przypadku kiedy oddziaływanie między ciałami jest równe zero.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Love A.E.H.: *Theoretical Mechanics an Introductory Treatise on the Principles of Dynamics with Applications and Numerous Examples*. Cambridge at the University Press, London 1921.
- [2] Routh E.J.: *The Elementary Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. Being Part I of a Treatise on the Whole Subject with Numerous Examples*. Macmillan and Co., Limited New York: The Macmillan Company, 1905.
- [3] Smart E.H.: *Advanced Dynamics, Vol. I and Vol. II*. Macmillan and Co., Limited London 1951.
- [4] Straszewicz Z.: *Nauka o ruchu*. Skład Główny Księgarni Gebethnera i Wolfa, Warszawa 1916.
- [5] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>> w zadaniach i przykładach obliczeniowych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [6] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
- [7] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [8] Straszewicz Z.: *Zbiór zadań z mechaniki*. Nakładem „Komisji Wydawniczej” Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej. Nr wydania 126. Warszawa 1921.