

Wacław SZCZEŚNIAK<sup>1</sup>

### DRGANIA PŁYT – OD CHLADNIEGO DO WSPÓŁCZESNOŚCI

*W referacie podano szkic historyczny rozwoju mechaniki teoretycznej od starożytności do czasów współczesnych. Omówiono osiągnięcia polskich autorów w mechanice w okresie przedwojennym. Na tle rozwoju historycznego mechaniki podano początki zagadnienia dynamiki płyt. Omówiono badania Chladniego nad zagadnieniem własnym płyt. Podano prosty program komputerowy prowadzący do tzw. figur Chladniego. Przeanalizowano równania ruchu płyty cienkiej Kirchhoffa i płyt o średniej grubości Mindlina. Podano kilka zastosowań teorii płyt w przykładach obliczeniowych w tym symulacje komputerowe MES.*

### VIBRATIONS OF PLATES FROM CHLADNI'S TO THE PRESENT DAY

*The paper deals with problems of vibrations of plates. First the historical review concerning engineering mechanics from ancient world until contemporaneity is presented. Achievements of pre-war Polish scientists is discussed. Next, at the background of mechanics, the beginning of the problem of dynamics of plates is displayed. Further Chladni's research concerning eigen problem of plates are presented. Equations of motion of Kirchhoff's plate, and Mindlin's plate are analysed along with numerical results. Computer algorithm for Chladni's figures determination as well as some computer simulations are showed.*

### 1. WSTĘP I RYS HISTORYCZNY

Trzy nauki uważane są za najstarsze w świecie: matematyka, astronomia i mechanika, która do czasów Newtona była w zasadzie systemem filozoficznym. Początki rozwoju mechaniki sięgają do głębokiej starożytności Babilonu, Egiptu, Mezopotamii i Rzymu. Nazwa mechanika wywodzi się z starożytnej Grecji, a dokładniej z greckiego teatru starożytnego i jest związana z nazwiskiem Arystotelesa (384-322 p.n.e.). Greckie słowo „μηχανή” [czytaj] „mechane” ma wiele znaczeń. Oznacza między innymi maszynę teatralną, podnoszącą do góry i opuszczającą w dół aktora z wieńcem laurowym na skrzyni, symbolizującego boga. Stąd późniejsze znane powiedzenie w starożytnym Rzymie „*deus ex machina*” czyli bóg z maszyny. Jak pisze Newton w *Principiach* (1687), drugie znaczenie słowa „mechane” w czasach starożytnych oznacza również: mechanizm, wynalazek, sposób, fortel, podstęp, metoda. Jak bowiem podnieść ciężki blok kamienny w górę

<sup>1</sup> Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16, tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl

stosunkowo małą siłą? Wynaleziono dźwignię. Jak podnieść ciężką kamienną głowicę kolumny na wysokość 20 metrów? Wynaleziono więc wielokrążek i polikrążek. Arystoteles, nauczyciel i wychowawca Aleksandra Macedońskiego w trzech księgach o fizyce: „O ziemi”, „O niebie” i „O przyczynach i skutkach” pisał, że siła jest proporcjonalna do masy i prędkości przy założeniu układu geocentrycznego Ptolemeusza, co nie jest zgodne z doświadczeniem i co zahamowało rozwój mechaniki na ponad 2000 lat.

$$\vec{F} = m \vec{v} \quad (1)$$



Rys. 1. Mechanika w starożytnym Egipcie wg monografii Macha [7]

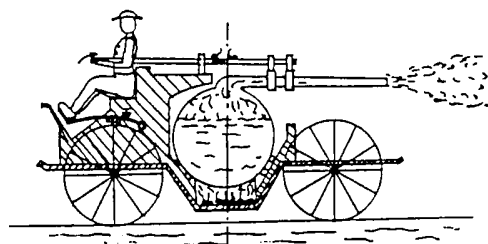
Drugim uczonym z tzw. okresu Ateńskiego był Archimedes (287-212 p.n.e.). Jak wykazują najnowsze badania był mu już znany z doświadczenia równoległobok sił, prawo dźwigni, środek ciężkości i sposób jego wyznaczania. Ruch w rozumieniu Arystotelesa to zmiana jednego stanu w drugi „bogatego w biednego”, „chorego w zdrowego”. Ruchy podzielono na naturalne i wymuszone. Naturalnym będzie ruch kamienia w dół, a płomienia do góry. Ruch wymuszony to rzut kamienia do góry. Obrót koła to taki ruch w którym jego górna połowa przemieszcza się w prawo, zaś dolna w lewo. Od Arystotelesa z greki wywodzą się również nazwy: kinematyki, statyki i dynamiki.

Drugim okresem starożytności był tzw. okres Aleksandryjski (I-II wiek p.n.e. ÷ II n.e.) Okres ten wiązany jest z nazwiskiem Herona (62-150 n.e.). Heron uważany jest za mechanika-praktyka, to on stworzył podstawy mechaniki gazów i cieczy, pneumatyki, wynalazł lewar, kulę eolską, kołowrót, klin i śrubę. Newton w przedmowie do I wydania „Principiów” pisze: „Starożytni filozofowie rozumieli mechanikę dwojako: raz jako naukę ścisłą, rozumową, racjonalną opartą na pojęciach pierwotnych, wyjściowych i dedukcji, a raz jako naukę praktyczną, stosowaną we wszystkich rzemiosłach i przedsięwzięciach”. Stan mechaniki w wiekach średniowiecza można określić jako zastój. Kościół a ściślej inkwizycja przyjęła założenia mechaniki Arystotelesa, które przetrwały do czasów Gallileusza i Newtona. Dopiero w epoce Odrodzenia, dzięki pracom Leonarda da Vinci (1452-1519) następuje ożywienie nauk ścisłych. Znamienne są dwa cytaty z dzieł tego geniusza swojej epoki: „Mechanika jest rajem nauk matematycznych gdyż przez nią dochodzi się do owoców matematyki”, oraz „Nie ma zgoła pewności tam, gdzie nie można zastosować jednej z nauk matematycznych lub tych, które związane są z matematyką”.

Leonardo opracował początki metody naukowej w fizyce opartej na doświadczeniu. Mikołaj Kopernik (1473-1543) w swoim wiekopomnym dziele „O obrotach ciał niebieskich” obalił teorię geocentryczną, tworząc podstawę transformacji Gallileusza.

Wspomnieć należy w tym miejscu o pracach S. Stevina (1548-1620) i R. Descartesa (1596-1642), których wkład do mechaniki był istotny. Jednak znacząco do rozwoju mechaniki w okresie Odrodzenia przyczynił się Gallileusz (1561-1642). Odkrywając prawa swobodnego spadania i ruchu wahadła matematycznego, sformułował zasadę względności ruchu, która jest podstawą mechaniki klasycznej. Prawa mechaniki klasycznej są niezmiennicze względem transformacji Gallileusza. Prace Gallileusza zamykają w zasadzie pierwszą bardzo długą fazę rozwoju mechaniki od starożytności do połowy XVII wieku.

Zasadniczym zwrotem w rozwoju mechaniki nowożytnej okazała się wiekopomna praca I. Newtona (1642-1727) pt. „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” publikowana w Londynie w 1687 roku. Pojęcie czasu absolutnego i absolutnej, jednorodnej przestrzeni oraz tzw. prawa Newtona stanowiły i stanowią o dalszym burzliwym rozwoju mechaniki. Do najwybitniejszych uczonych okresu Newtonowskiego należy zaliczyć J. Bernoulliego (1667-1748), Leibniza (1646-1716), Eulera (1707-1783), d’Alemberta (1717-1783)-twórcę metody kinetostatyki i innych.



Rys. 2. Wagon Newtona z XVII wieku

W 1788 roku J.L. Lagrange (1736-1813) wydał dwutomowe dzieło „Mécanique analytique” nie zawierające żadnego rysunku, otwierając w ten sposób nową gałąź mechaniki nazywaną analityczną. Jej podstawą są całkowite zasady oparte przede wszystkim na pracy wirtualnej. Kontynuatorami mechaniki analitycznej byli Hamilton, Poincaré, Jakobi, Ostrogradzki, Gauss, Żukowski, Ljapunow, Czetajew, Czapłygin, Mieszczerski, Timoshenko, J.N. Franke M.T. Huber i wielu, wielu innych. Historia mechaniki do epoki Newtona jest w zasadzie historią nauki. Z historii mechaniki opublikowano wiele monografii i opracowań książkowych [19-23]. Wymienić tu należy dzieła Macha [7], Dugasa [19], Grigoriana [20-22], Clagetta, Duhama, Szabo, Maddoxa i inne. W literaturze rosyjskojęzycznej wydano szereg znaczących dzieł na przykład dwutomowa „Istoria mechaniki Grigoriana i Fradlina, Rożann’skoj, Putiaty i Fradlina, Wiesołowskiego i innych autorów. O nauczaniu mechaniki teoretycznej w Rosji oraz USA i krajach europejskich są napisane przez autora dwa artykuły [6] i [23] i inne prace.

## 2. MECHANIKA TEORETYCZNA W POLSCE W OKRESIE PRZEDWOJENNYM

Problem ten był przedmiotem referatów Z. i D. Mazurkiewiczów, R. Gutowskiego „Mechanika Teoretyczna – zarys stanu i perspektywy rozwoju w Polsce”, B. Radziszewskiego „Mechanika Teoretyczna - aktualne kierunki rozwoju i J.K. Grabackiego z 1996 roku. W języku polskim nie ma monografii ani podręcznika dotyczącego historii mechaniki teoretycznej czy stosowanej. Tradycje nauczania mechaniki teoretycznej w okresie przedwojennym są znaczące. Przede wszystkim należy wymienić podręcznik Frankego z 1889 roku „Mechanika Teoretyczna” z elementami mechaniki cieczy i teorii sprężystości i Fabiana z 1896 roku „Zarys Mechaniki Analitycznej”. Pierwszy zbiór zadań ukazał się w Polsce w 1916 roku autorstwa Wojnicza-Sianożęckiego. Seria podręczników Z. Straszewicza, rektora PW, a zwłaszcza jego „Nauka o Ruchu” (1918 r), wprowadziła nauczanie mechaniki na politechnikach na poziom europejski. Inne liczne polskie pozycje z tego zakresu opracowali: Czopowski, pierwszy dziekan wydz. IL PW, Przeborski, Banach, Sztark, Wundheiler, Huber i inni.

Organizacją działalności naukowej w zakresie mechaniki teoretycznej i analitycznej w Polsce zajmuje się Komitet Mechaniki PAN, w ramach którego została powołana w 1972 roku Sekcja Mechaniki Teoretycznej. Niestety przetłumaczono tylko kilka podręczników zagranicznych na język polski. Większość nowych pozycji to lokalne wydawnictwa oficyn politechnicznych, przeznaczone na potrzeby danego wydziału i okrojonego na ogół programu nauczania. W ostatnich dekadach obserwujemy w kraju poważne obniżenie poziomu nauczania studentów mechaniki teoretycznej na uczelniach technicznych, co nie oznacza spadku wymagań. Prowadzi to przeważnie do dwukrotnego lub wielokrotnego powtarzania przedmiotu. Różne są przyczyny tego zjawiska: mizerne przygotowanie licealne, cięcia przedmiotów fizyka i matematyka i inne.

## 3. DOŚWIADCZENIA CHŁADNEGO, FIGURY I LINIE WĘZŁOWE

Na tle przedstawionego w skrócie rysu historycznego rozwoju mechaniki, zagadnienia dynamiczne płyt należą do najstarszych i wiążą się z epoką napoleońską we Francji. Ernst Florens Fridrich Chladni (1756-1827) zwany ojcem akustyki, pocierając smyczkiem od skrzypiec brzegi szklane lub miedziane posypane suchym, miałkim, białym piaskiem, zauważył układanie się piasku na powierzchni płyty w dziwne linie. Płytki miały kształty kołowe i kwadratowe. Owe dziwne linie okazały się liniami węzłowymi drgań własnych, a metoda ich otrzymywania nosi nazwę metody smyczkowej. Doświadczenia te Chladni opisał w trzech książkach 1787 „*Antdeckungen über die Theorie des Klagen*”, 1802 „*Die Akustik*” i 1817 roku. Ukoronowaniem działalności Chladniego był pokaz jego doświadczeń w lutym 1809 roku w pałacu Tuilerie w Paryżu przed Napoleonem w obecności Cedepe, Bertholeta, Laplace’a, Poissona, Savarta, Lagrange’s, Biota i Humbolta. Po krótkim koncercie na wynalezionych przez Chladniego dwóch instrumentach euphonie i clavicylindrze zademonstrował cesarzowi swoje doświadczenia nad płytami. W wyniku tego spotkania Napoleon przeznaczył 3.000 ówczesnych franków (ponad 1 kg złota), na osobistą nagrodę dla Chladniego, natomiast Instytut Akademii otrzymał 9.000 franków na opracowanie teorii wyjaśniającej doświadczenia Chladniego i przetłumaczenie na język francuski „*Traité de l’Acoustique*”. Akademia francuska ogłaszała konkurs trzy razy, za trzecim razem pierwszą nagrodę, po korekcie Lagrange’a,

otrzymuje Sophie Germain wyprowadzając wariacyjnie i poprawnie równanie ruchu cienkiej płyty sprężystej w postaci:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2)$$



Rys. 3. Ernst Florens Fridrich Chladni (1756-1827)



Rys. 4. Prezentacja doświadczenia Chladniego w pałacu Tuilerie–Paryż, luty 1809 roku



Rys. 5. A. Volta prezentuje swój stos przed Napoleonem w Paryżu w 1802 roku

Jednak całkowicie poprawne wyprowadzenie równania ruchu płyty w raz z warunkami brzegowymi wyprowadził w 1850 roku Kirchhoff, stąd mówimy o teorii płyt Kirchhoffa.

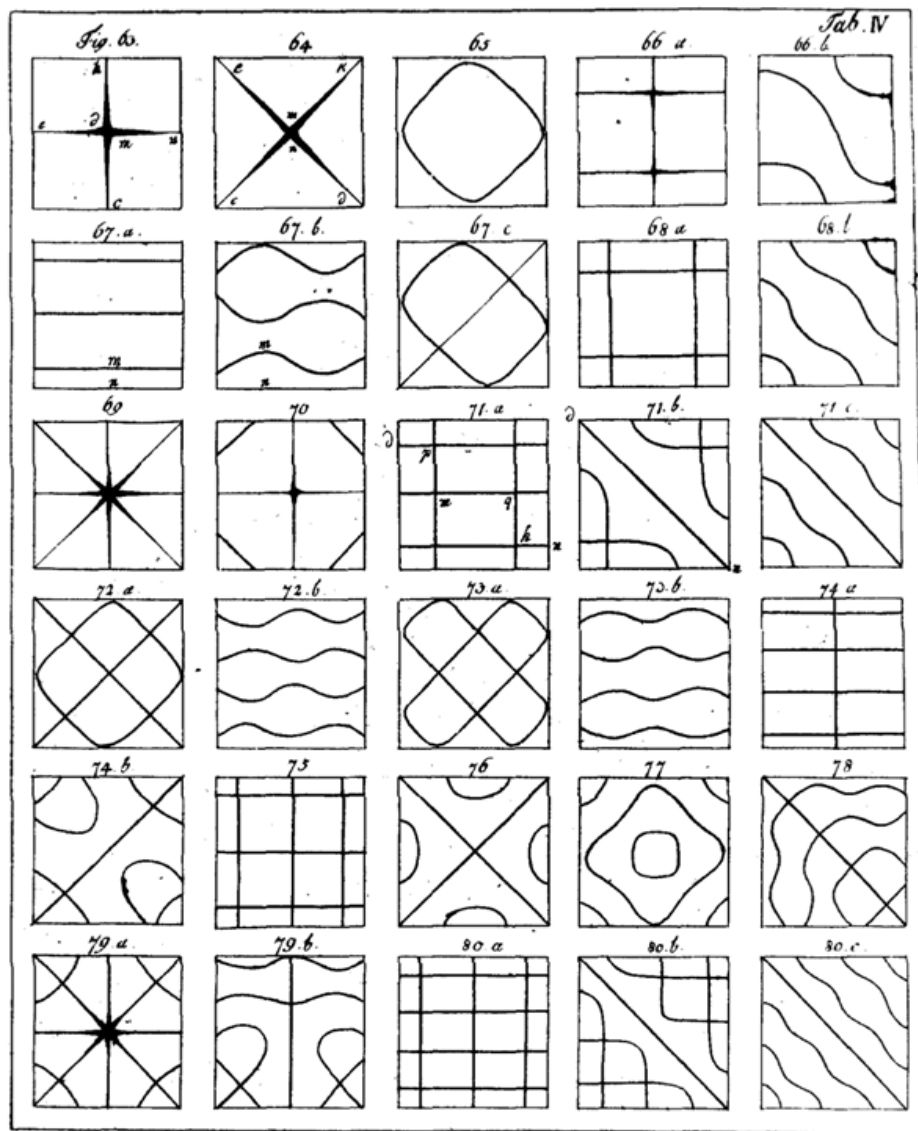
Chladni zajmował się również meteorytami i mineralogią publikując jedną z pierwszych książek na ten temat. W przypadku płyt okrągłych Chladni ustalił empiryczne zależność pomiędzy częstotliwością jej drgań własnych a liczbą linii węzłowych radialnych  $n$  i promieniowych  $m$

$$f \approx (n + 2m)^2. \quad (3)$$

Chladni zmarł w środę 4 kwietnia 1827 roku podczas pobytu we Wrocławiu, gdzie przebywał na zaproszenie prof. H. Steffensa i tam został pochowany. Obecnie na starym cmentarzu Wielkim we Wrocławiu wybudowano osiedle mieszkaniowe i nie można odnaleźć miejsca grobu Chladniego.

Kontynuatorką badań Chladniego była Mary D. Waller w latach 1937-1957 profesor fizyki w Royal Free Hospital School of Medicine w Londynie. Przypadek ze sprzedawcą lodów pod Uniwersytetem, któremu dzwonił i drgał dzwonek rowerowy, przy dotknięciu do niego suchego lodu, zdecydował o zainteresowaniu się dwutlenku węgla w postaci stałej (suchy lód) jako wyzwalacza drgań przedmiotów metalowych a płytek w szczególności. Z tego zakresu Waller opublikowała kilkadziesiąt prac a ich ukoronowaniem jest jej monografia „Chladni figur a study In symmetry” wydana w Londynie w 1961 roku.

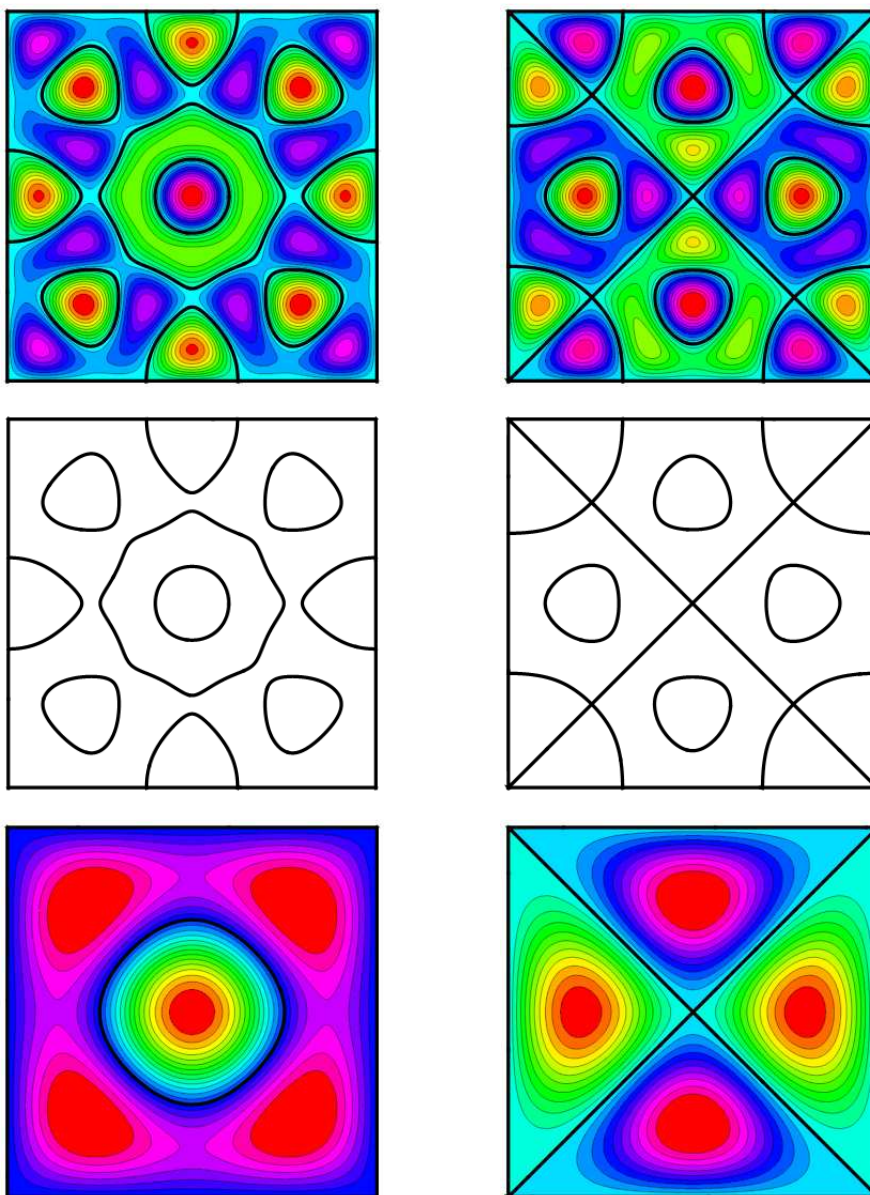
$$\begin{aligned}
 D\nabla^4 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, & w &= W \cos \omega t, & (\nabla^4 - \lambda^4)W &= 0, \\
 (\nabla^2 + \lambda^2)(\nabla^2 - \lambda^2)W &= 0, & \lambda^4 &= \frac{m\omega^2}{D}, & \omega &= \omega_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m}}, \\
 \nabla^2 W_1 + \lambda^2 W_1 &= 0, & \nabla^2 W_2 - \lambda^2 W_2 &= 0, \\
 w(x, y) &= A_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \pm A_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}, \\
 w(x, y) &= A_{3,1} \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{1\pi y}{a} \pm A_{1,3} \sin \frac{1\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{a}, \\
 A_{3,1} &= 1, & A_{1,3} &= 0, & A_{3,1} &= 0, & A_{1,3} &= 1, \\
 A_{3,1} &= 1, & A_{1,3} &= 1, & A_{3,1} &= 1, & A_{1,3} &= -1, & a &= 6m.
 \end{aligned} \quad (4)$$



Rys. 6. Figury Chladniego na płycie kwadratowej o swobodnych krawędziach wg monografii „Die Akustik”

Podstawy matematyczne otrzymywania figur Chladniego podano we wzorach (4). Drgania własne są drganiami harmonicznymi a układ sił wewnętrznych na węzłach w płycie jest układem samo zrównoważonym. Na rysunkach 7 pokazano kilka symetrycznych i antysymetrycznych postaci drgań własnych (figur Chladniego) przy

$m = 3$ ,  $n = 7$  oraz przy  $m = 1$ ,  $n = 3$  wraz z liniami węzłowymi i warstwicami. Poza modami podstawowymi istnieją jeszcze tzw. Postacie drgań kombinowane jeśli fale w jednym kierunku różnią się amplitudą w drugim kierunku.



Rys. 7. Figury Chladniego na kwadratowej sprężystej płycie przegubowo podpartej na obwodzie przy różnych  $m$  i  $n$



### 5. DRGANIA WYMUSZONE PŁYT POD RUCHOMYM OBCIĄŻENIEM

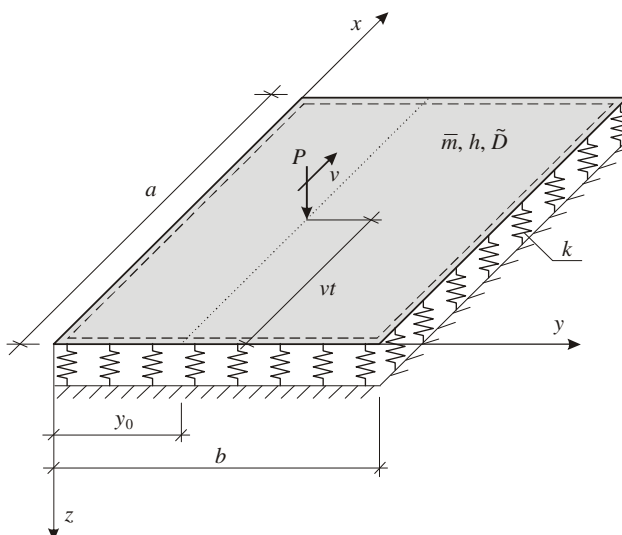
Równanie ruchu lepko sprężystej płyty cienkiej, przegubowo podpartej na obwodzie i spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera, wymuszone ruchomą siłą jest następujące [18]:

$$\tilde{D} \left( 1 + \tilde{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} + kw = P \delta(x-vt) \delta(y-y_0). \quad (5)$$

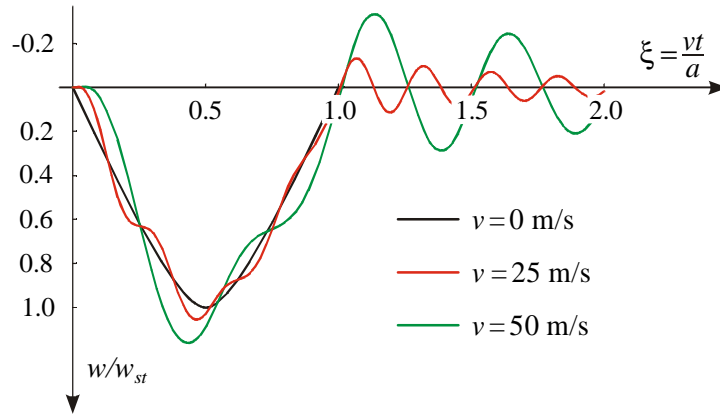
Rozwiązanie analityczne tego równania otrzymujemy przy wykorzystaniu szeregu funkcji własnych zagadnienia brzegowego wg którego rozwijamy obciążenie wymuszające, w tym przypadku opisane pseudo funkcjami Diraca. Mamy zatem:

$$w(x, y, t) = \frac{4P}{\bar{m}ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_{m,n}} \sin \alpha_m x \sin \alpha_n y \sin \alpha_n y_0 \int_0^t e^{-h_{m,n}(t-\tau)} \sin \alpha_m v \tau \sin \tilde{\omega}_{m,n}(t-\tau) d\tau. \quad (6)$$

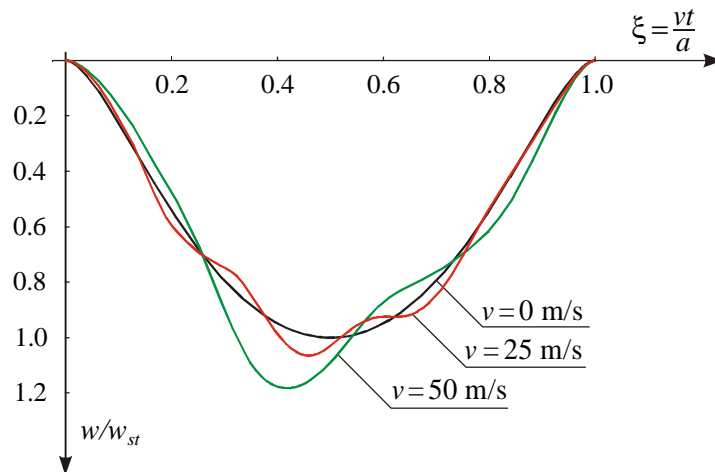
Szereg (6), po analitycznym rozwiązaniu całki Cauchy'ego-Duhamela, jest szybko zbieżny. Po jego zaprogramowaniu na komputer otrzymujemy następujące wykresy ugięcia dynamicznego środka płyty w czasie przejazdu i po zjeździe ruchomej siły skupionej z płyty rysunki 7-9.



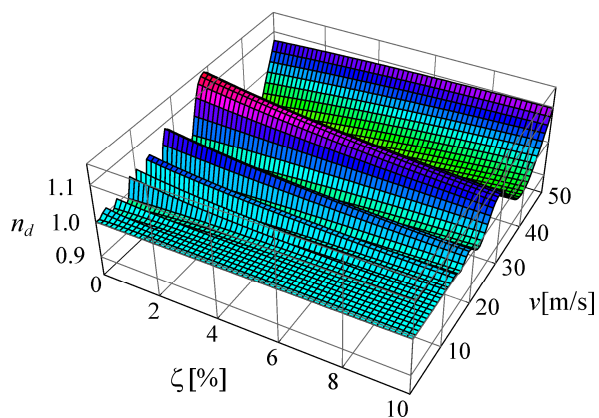
Rys. 8. Schemat dynamiczny płyty lepko-sprężystej obciążonej ruchomą siłą



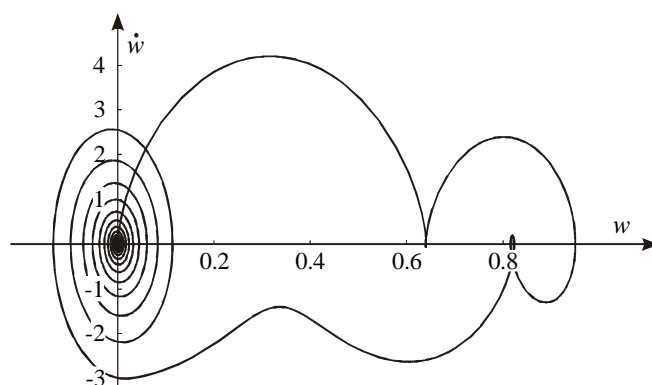
Rys. 9. Ugięcie środka płyty w przypadku statycznym oraz przy prędkości ruchomej siły  $v = 25$  m/s i  $v = 50$  m/s, zastępcza liczba tłumienia  $\zeta_{m,n} = 5\%$



Rys. 10. Wpływ prędkości na ugięcie śledzące pod ruchomą siłą przy zastępczej liczbie tłumienia  $\zeta_{m,n} = 5\%$



Rys. 11. Współczynnik dynamiczny  $n_d$  w funkcji prędkości  $v \in \langle 0; 50 \rangle$  [m/s] i zastępczej liczby tłumienia  $\zeta_{m,n} \in \langle 0; 10 \rangle$  [%]



Rys. 12. Portret fazowy we współrzędnych  $w$  i  $\dot{w}$  przy prędkości sily  $v = 25$  m/s : płyta lepko-sprężysta o zastępczej liczbie tłumienia  $\zeta_{m,n} = 5\%$

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Chladni E.F.F.: *Entdeckungen über die Theorie des Klagen*. Beritkopf Und Hartel, Leipzig, 1787 (reprint Leipzig 1980).
- [2] Chladni E.F.F.: *Die Akustik*. Beritkopf Und Hartel, Leipzig, 1802, 1830, (patrz również wydanie francuskie „*Traite d'Acoustique*”, Paryż 1809, 1812).

- [3] Waller M.D.: *Chladni figures, a study in symmetry*. G. Bell and Sons LTD, London 1961.
- [4] Szcześniak W.: *Linie węzłowe na płytach (figury Chladniego)- rys historyczny zagadnienia własnego*. Theoretical Foundations of Civil Engineering, VIII, Ed. By W. Szcześniak OW PW, Warsaw 2000, pp. 293-310.
- [5] Szcześniak W.: *Wybrane zagadnienia z dynamiki płyt*. OW PW, Warszawa 2000.
- [6] Szcześniak W.: *Mechanika teoretyczna i mechanika analityczna na przełomie XIX i XX wieku*. Konferencja „Polska mechanika u progu XXI wieku”, Kazimierz Dolny, Warszawa, listopad 2001, pp. 11-56.
- [7] Mach E.: *The science of mechanics; a critical and historical account of its development*, by Ernst Mach: supplement to the 3rd English ed. containing the author's additions to the 7th German ed. (1915)
- [8] Ullmann D.: *Ernst Florens Friedrich Chladni* (Teubner, Leipzig, 1983).
- [9] Leissa A.W.: *Vibration of plates*. NASA, Washington 1969.
- [10] Jemielita G.: *Meandry teorii płyt*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo z. 117, Warszawa 1991.
- [11] Duffin R.J.: *Nodal lines of a vibrating plates*. Journal Math. And Physics 1952-1953, Vol. 31-32, pp. 294-299.
- [12] Hoppmann W.H., Magness L.S.: *Nodal patterns of the free flexural vibrations stiffened plates*. Journal of Applied Mechanics. Vol. 24, no 4, pp. 526-530.
- [13] Rossing T.D.: *Chladni's law for vibrating plates*. Americ. Journal Physics, 50, 3, 1982, pp.271-274.
- [14] Szcześniak W.: *Pewne przykłady figur Chladniego i linii węzłowych na kwadratowej płycie sprężystej swobodnie podpartej na obwodzie*. XI Polsko-Rosyjskie Seminarium "Teoretyczne podstawy budownictwa". Moskwa 2002, str. 91-112.
- [15] Rayleigh J.W.: *On the nodal lines for square plate*. Phil. Magaz. Seria 4, No 304, Vol. 46, 1873, p.166.
- [16] Jensen H.C.: *Production of Chladni figures on vibrating plates using continuous excitation*. Am. J. Phys. 23, 1955, pp. 503-505.
- [17] Germain S.: *Recherches sur theorie des surfaces elastiques*. Courcier, Paris 1821.
- [18] Ataman M.: *Drgania belek i płyt poprzecznie niejednorodnych na podłożach odkształcalnych wymuszone obciążeniami ruchomymi*. Rozprawa doktorska, OW PW, Warszawa 2010 r.
- [19] Dugas R.: *History of mechanics*. Dover N.Y. 1955 (tłumaczenie z francuskiego).
- [20] Grigorjan A.T., Zubow W.P.: *Oczerki razwitja osnownych poniatiej mechaniki*. AN SSSR, Moskwa 1962.
- [21] Grigorjan A.T.: *Mechanika od antycznosti do naszych dnjej*. Nauka, Moskwa 1971.
- [22] Grigorjan A.T.: *Oczerki istorii mechaniki w Rosji*. AN SSSR, Moskwa 1961.
- [23] Szcześniak W. *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OW PW, Warszawa 2010.