TRANSCOMP – XIV INTERNATIONAL CONFERENCE
COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCE, INDUSTRY AND TRANSPORT

Complexity, characteristic semi-group of automaton,
direct sum, direct product

Stanisław BOCIAN[1]

ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ SUMY PROSTEJ I ILOCZYNU PROSTEGO AUTOMATÓW ASYNCHRONICZNYCH SILNIE SPÓJNYCH

Półgrupa charakterystyczna jest szczególnie istotnym pojęciem w teorii automatów; jest nośnikiem ważnych informacji i określa zdolność do przetwarzania informacji. Ma to bezpośrednio ważkie konsekwencje praktyczne w sferze projektowania optymalnych układów logicznych. Suma prosta i iloczyn prosty automatów można uważać za realizację – odpowiednio sekwencyjnych i równoległych obliczeń

COMPLEXITY OF THE CHARACTERISTIC SEMI – GROUP OF THE DIRECT SUM AND DIRECT PRODUCT OF THE STRONGLY CONNECTED ASYNCHRONOUS AUTOMATONS

The characteristic semi – group is the particularly essential conception in the automaton theory; it is the carrier of the important information and defines the ability to information processing. It has the direct weighty consequences that are practical in the designing domain of the optimum logic circuits. The direct sum and the direct product of automatons can be considered as the realization – the sequence and parallel calculations accordingly.

1. WSTĘP

Maszyna o skończonej liczbie stanów FSM (Finite State Machine – Skończona Maszyna Stanowa, lub automat cyfrowy) jest jednym z modeli opisującym zachowanie systemów sterowania, w którym chwilowe działanie systemu jest w sposób naturalny pewne abstrakcyjne modele układów cyfrowych, to znaczy elementów i układów pracujących w dyskretnych chwilach czasu, przy czym sygnały mają skończoną liczbę wartości. Teoria automatów będąca teoretycznym rozwinięciem układów logicznych – jest skutecznym narzędziem projektowania, umożliwiającym formalne projektowanie złożonych układów cyfrowych z zastosowaniem standartowych układów elementarnych.

Rozwój teorii automatów był stymulowany przez dwie uzupełniające się tendencje:

[1]Stanisław BOCIAN Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR" POLSKA; Poznań 61-055;Warszawska 181.
Telefon: + 48 (0)61 664 14 38; E-mail: Elektrotechnika @ tabor.com.pl

a.) konstruowanie modeli bliżej związanych ze współczesnym sprzętem i oprogramowaniem,
b.) znajdowanie poprawnych narzędzi matematycznych (języka matematycznego), w którym można wyrazić procesy obliczeniowe o dużej różnorodności.

Algebraiczna teoria automatów z jednej strony jest teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry. Z postaci abstrakcyjnej, w procesie syntezy, można je przekształcić w schemat logiczny, wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce, oprogramowanie lub ich kombinację. Tym samym uczy teoria automatów jak koncepcyjnie i obliczeniowo rozważać wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce.

Rozwój teorii automatów związany jest ze wzrostem znaczenia techniki komputerowej w różnych gałęziach przemysłu, jak również z doskonaleniem metod analizy i syntezy cyfrowych układów sterowania z uwzględnieniem skali scalania i złożoności funkcjonalnej podzespołów cyfrowych. Ten ostatni czynnik miał szczególny wpływ na rozwój teorii automatów zmiennych w czasie, bowiem automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Dlatego też interesujące są takie realizacje automatu, które z jednej strony symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie, a z drugiej strony są niezależne od aktualnego stanu technologii bądź uwzględniają jej najnowsze trendy.
W zakresie teorii automatów zmiennych w czasie pojawiło się szereg opracowań [15,16,17,18,21,23,24,25,26]. Wyniki dotyczące spójności i silnej spójności [5,23,25,26], rozszerzeń automatów [5,23,25,26], funkcji zachowujących operacje [5,14,17,18,24,25,26], miały istotny wpływ na poszukiwanie złożoności półgrup charakterystycznych automatów, które stosunkowo prosto opisują niektóre własności automatów. Problemy półgrup charakterystycznych automatów przedstawiono w pracach [18,23,24,25,26]. W pracy [24,25,26] badano właściwości półgrupy charakterystycznej automatu silnie spójnego, a także półgrupy charakterystycznej ustalonego analogu różnych sum okresowych związanych z izomorfizmami stanowymi.

Algebraiczna teoria automatów jest dynamicznie rozwijającą się teorią, która z jednej strony jest teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry [1,3,15,18,20,26]. Pojęcia z algebry w postaci sformalizowanej są analizowane i przekształcane do postaci dogodnych do optymalizacji.

Od wielu lat jesteśmy świadkami intensywnego rozwoju teorii automatów, szczególnie algebraicznej teorii automatów rozwijanej na gruncie teorii półgrup [4,23,24,25,26]. Definicja relacji równoważności Myhilla na zbiorze stanów automatu oraz półgrup charakterystycznych automatu pozwoliły wydobyć zeń możliwości obliczeniowe. Dekompozycja półgrup pozwala wprowadzić pojęcie automatów nieredukowalnych, z których można złożyć wszystkie pozostałe automaty.

Półgrupa charakterystyczna jest szczególnie istotnym pojęciem w teorii automatów; jest nośnikiem ważnych informacji i określa zdolność do przetwarzania informacji. Ma to bezpośrednio ważkie konsekwencje praktyczne w sferze projektowania optymalnych układów logicznych.

Dla badań złożoności półgrupy charakterystycznej automatów ważne są następujące motywacje:
a) w ogólnym przypadku półgrupa charakterystyczna posiada n^n elementów, dlatego interesujące jest pokazanie klasy automatów, które posiadają

wielomianową zależność liczby elementów półgrupy charakterystycznej od liczby stanów,

b) półgrupa charakterystyczna, zgodnie z [24,25,26], ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczanie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności uogólnionych homomorfizmów automatów,

c) algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów stanowi rozwiązanie problemu wyznaczania automatu, który „ma możliwość” drugiego automatu,

W publikacjach [6,9] przedstawiono szkice dowodów na złożoność półgrup charakterystycznych sumy prostej i iloczynu prostego automatu $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected. W pracy przedstawiono pełną wersję dowodu na złożoność półgrupy charakterystycznej sumy i iloczynu prostego automatów $DFASC_2$ dla słów z alfabetu dwuliterowego $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$ oraz $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$..

2. ROZWAŻANIA WPROWADZAJĄCE

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki że $a\ R\ b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja f jest $1-1$ (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkcja jest „na ”, gdy

$$Y = \{\ b : b = f(a), a \in X\ \}.$$

Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną $(S\ \circ)$ gdzie: S niepusty zbiór, $(\circ)$ operacja binarna na zbiorze stanów S. Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $S \times S$ w zbiór S. Binarną operacją $(\circ)$ na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli

$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla wszystkich $a, b, c \in S$.

Półgrupa, to taki grupoid $(S, \circ)$, w którym operacja $(\circ)$ jest asocjatywna. Niech Σ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór Σ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem x

w alfabecie Σ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu, napisanych obok siebie, a długość słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter σ.

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywam uporządkowaną trójkę (S, Σ, M), gdzie:

S – jest skończonym, niepustym zbiorem stanów,

Σ – jest skończonym, niepustym zbiorem wejść,

$M: \ S \times \Sigma \ \rightarrow \ S$ jest funkcją przejść.

Symbolem Σ^+ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru Σ. Zbiór Σ^+ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegającą na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbole $\sum^*$ oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\sum^* = \sum^+ \cup \lambda$, gdzie λ jest ciągiem pustym.

Funkcję M rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \sum^+$ w następujący sposób: niech $M(s, x)$ będzie zdefiniowane, wtedy:

$$M(s, x\sigma) = M(M(s, x), \sigma) \text{ dla każdego } s \in S,\ x \in \textstyle\sum^+,\ \sigma \in \sum .$$

Na zbiorze $\sum^*$ zdefiniujemy relację:

$$x\ R\ y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall_{s \in S}\ M(s, x) = M(s, y).$$

R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \sum^*$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkim klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupa charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

Dla automatu $A = (S, \sum, M)$ definiujemy automat charakterystyczny $\overline{A} = (S, \overline{I(A)}, \overline{M})$, gdzie funkcja przejść $\overline{M}$ jest zdefiniowana następująco $\overline{M}(s, \overline{x}) = M(s, x)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A = (S, \sum, M)$ nazywamy automat $A_x = (S, \{x\}, M_x)$ gdzie $x \in \sum^*$ i M_x jest ograniczeniem M do $S \times \{x\}$.

Dla każdego $x \in \sum^*$ zdefiniujemy przekształcenie f_x zbioru S w siebie, gdzie : $f_x(s) = M(s, x)$, dla każdego $s \in S$. Przekształcenie f_x jest implikowane przez x. Zbiór przekształceń zbioru S w siebie implikowanych przez wszystkie elementy z $\sum$ będziemy oznaczać symbolem J. J ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy.

Półgrupa F jest antyizomorficzna z $\overline{I}$ ponieważ:

$$\varphi : \overline{I} \to F,\quad \varphi(\overline{x}) = f_x, \text{ gdzie } x \in I,\ \overline{x} \in \overline{I} \text{ przy czym:}$$

(i) $\varphi(\overline{x} \circ \overline{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f_{xy} = f_y(f_x) = \varphi(\overline{y})\,\varphi(\overline{x})$

(ii) $\varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y}) \Rightarrow f_x = f_y \Rightarrow \forall_{s \in S}\ M(s, x) = M(s, y) \Rightarrow x\ R\ y \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$, a zatem φ jest „$1-1$"

(iii) $\varphi(\overline{x}) = f_x \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(\overline{x}) = \varphi^{-1}(f_x) \Rightarrow \overline{x} = \varphi^{-1}(f_x)$, a zatem φ jest na.

Automat można zatem zdefiniować jako parę (S, J), a automat charakterystyczny automatu (S, J) jako parę (S, F).

Automat $A = (S, \sum, M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary (s_1, s_2) stanów automatu A istnieje element x z półgrupy wejściowej taki, że $M(s_1, x) = s_2$.

Automat $A = (S, \sum, M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, gdy dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \sum$ zachodzi $M(s, \sigma) = M(s, \sigma\sigma)$.

Automat $A = (S, \sum, M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A = (S, \sum, M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\sum = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ wprowadzamy $x_0 = \sigma_0\sigma_1$ i $x_1 = \sigma_1\sigma_0$, dla których $f_{x_0} = f_{\sigma_1}\left(f_{\sigma_0}\right)$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}\left(f_{\sigma_1}\right)$. Dla dowolnego $x \in \sum^*$ zdefiniujemy przekształcenie $f_x : S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje: $\forall_{s \in S} f_x(s) = M(s, x)$ gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy $\forall_{s \in S} f_x(s) = f_{x'\sigma}(s) = f_\sigma(f_{x'}(s, \sigma))$.

Sumę prostą automatów $A = \left({}^A S, \sum, {}^A M\right)$ i $B = \left({}^B S, \sum, {}^B M\right)$ jest trójka uporządkowana $A \cup B = \left({}^{A\cup B} S, \sum, {}^{A\cup B} M\right)$, gdzie ${}^{A\cup B}S = {}^A S \cup {}^B S$; ${}^{A\cup B}M : {}^{A\cup B}S \times \sum \to {}^{A\cup B}S$ i dla każdego $s \in {}^{A\cup B}S$ i $\sigma \in \sum$ zachodzi

$$
{}^{A\cup B}M(s.\sigma) = \begin{cases} {}^A M\left({}^A s, \sigma\right) & \text{jeśli } {}^A s \in {}^A S \\ \\ {}^B M\left({}^B s, \sigma\right) & \text{jeśli } {}^B s \in {}^B S \end{cases}
$$

Iloczyn prosty automatów $A = \left({}^A S, \sum, {}^A M\right)$ i $B = \left({}^B S, \sum, {}^B M\right)$ jest trójką uporządkowaną $A \times B = \left({}^{(A\times B)}S, \sum, {}^{(A\times B)}M\right)$, gdzie ${}^{(A\times B)}S = {}^A S \times {}^B S$; ${}^{(A\times B)}M : {}^{(A\times B)}S \times \sum \to {}^{(A\times B)}S$, a funkcja przejść jest zdefiniowana jak następuje ${}^{A\times B}M\left(\left({}^A s, {}^B s\right), (\sigma)\right) = \left({}^A M\left({}^A s, \sigma\right), {}^B M\left({}^B s, \sigma\right)\right)$.

Dla dowolnego $x \in \Sigma^*$ definiujemy przekształcenie ${}^A f_x : {}^A S \xrightarrow{w} {}^A S$ określoną jak następuje:

$\forall {}^A s \in {}^A S \quad {}^A f_x\left({}^A s\right) = {}^A M\left({}^A s, x\right)$, gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy

$\forall {}^A s \in {}^A S \quad {}^A f_x\left({}^A s\right) = {}^A f_{x'\sigma}\left({}^A s\right) = {}^A f_\sigma\left({}^A f_{x'}\left({}^A s\right)\right)$

Przy wyznaczaniu złożoności półgrupy charakterystycznej sumy prostej iloczynu prostego automatów z klasy **DFASC₂** wykorzystano nowy algorytm na wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych przedstawiony w [6,8,10,11,13]. W pracach [10,11,13] przeprowadzono formalny dowód. W pracy [13] pokazano także odpowiednią interpretacje graficzną przedstawiono także programy języku BASIC , PASCAL i C^{++} wraz wizualizacją i praktyczną realizacją

3. ZŁOŻONOŚĆ PÓŁGRUPY CHARAKTERYSTYCZNEJ SUMY PROSTEJ I ILOCZYNU PROSTEGO AUTOMATÓW DFASC$_2$

Automaty skończone zdeterminowane zupełne w pełni określone asynchroniczne silnie spójne dla alfabetu 2-literowego oznaczać będziemy w skrócie DFASC$_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected)

Twierdzenie 1.

Niech $A \cup B = \left({}^{(A\cup B)}S, \sum, {}^{(A\cup B)}M\right)$ będzie sumą prostą automatów $A = \left({}^{A}S, \sum, {}^{A}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \sum, {}^{B}M\right)$ z DFASC$_2$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(A \cup B)}$ sumy prostej automatów $A \cup B$ ma własność:

$$card\left(\overline{I(A \cup B)}\right) = 2\,[m,n] \tag{1}$$

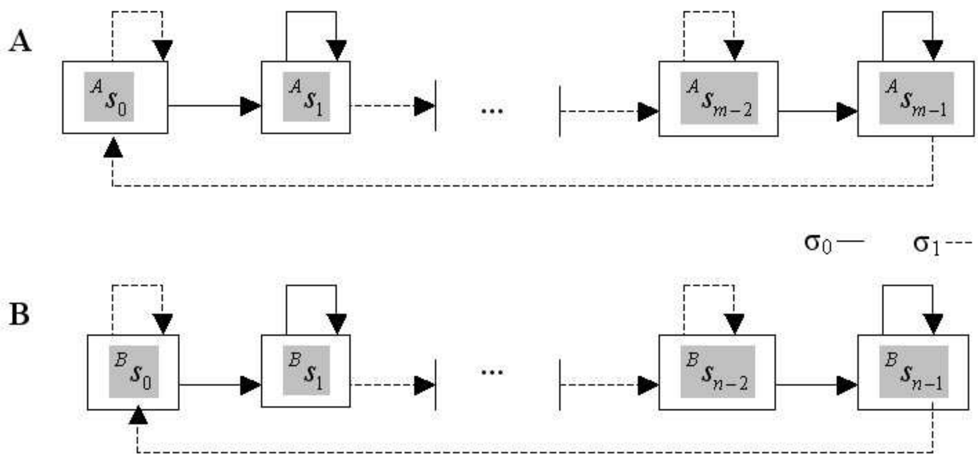
gdzie: card$\left({}^{A}S\right)$ = m >2, card$\left({}^{B}S\right)$ = n>2,

m, n liczby naturalne, m > n.; $card(\sum) = 2$; $x_0 = \sigma_0\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\sigma_0$;

$k_0 = \dfrac{(m - d_0)}{n}$, gdzie d_0 – reszta z dzielenia liczb m, n; $b_0 = n - d_0$

[m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n.

Dowód.



Rys. 1. Automaty A i B z klasy DFASC$_2$

Niech: ${}^{A}S = \left\{ {}^{A}s_0\ {}^{A}s_1, \ldots, {}^{A}s_{m-2}\ {}^{A}s_{m-1} \right\}, \quad {}^{B}S = \left\{ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_1, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-1} \right\}.$
Wiadomo że suma prosta zbioru stanów automatu A i B wynosi:
$${}^{ext_q(A\cup B)}S = \left\{ {}^{A}s_0^0, {}^{A}s_1^0, \ldots, {}^{A}s_{m-2}^0, {}^{A}s_{m-1}^0, {}^{B}s_0^0, {}^{B}s_1^0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^0, {}^{B}s_{n-1}^0 \right\}$$
Po przekształceniu zbioru ${}^{(A\cup B)}S = {}^{A}S \cup {}^{B}S$ pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:
$${}^{(A\cup B)}f_{\sigma_0} = \left({}^{A}s_1\ {}^{A}s_1, \ldots, {}^{A}s_{m-1}\ {}^{A}s_{m-1}\ {}^{B}s_1\ {}^{B}s_1, \ldots, {}^{B}s_{n-1}\ {}^{B}s_{n-1} \right)$$
Pod wpływem słowa x_0 otrzymujemy przekształcenie:
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0} = \left({}^{A}s_2\ {}^{A}s_2, \ldots, {}^{A}s_0\ {}^{A}s_0\ {}^{B}s_2\ {}^{B}s_2, \ldots, {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0 \right)$$
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0} = {}^{(A\cup B)}f_{\sigma_0}$$
Po n/2 krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy następujące przekształcenie:
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0^{n-2}} = \left({}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}\right)}\ {}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}\right)}, \ldots, {}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}-2\right)}\ {}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}\ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-2} \right)$$
gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:
$d_0 = m - k_0 n$; $\quad b_0 = n - d_0$;
k_0 – całkowita wielokrotność liczby n, m; $m > n$
$d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $\quad b_1 = n - d_1$

.

.

.

$d_{w-2} = m - b_{w-3} - k_0 n$; $\quad b_{w-2} = n - d_{w-2}$
$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$
Wtedy $[m, n] = mw = p$

Po $k_0 \frac{n}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0^{k_0\frac{n}{2}}} = \left({}^{A}s_{m-d_0}\ {}^{A}s_{m-d_0}, \ldots, {}^{A}s_{m-d_0-2}\ {}^{A}s_{m-d_0}\ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-2} \right)$$
Po $k_0 n$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0^{k_0 n}} = \left({}^{A}s_{m-d_1}\ {}^{A}s_{m-d_1}, \ldots, {}^{A}s_{m-d_1-2}\ {}^{A}s_{m-d_1-2}\ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-2} \right)$$
gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m,n]$:
$d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $\quad b_1 = n - d_1$
Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:
$${}^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = \left({}^{A}s_{m-d_w-1}\ {}^{A}s_{m-d_w-1}, \ldots, {}^{A}s_{m-d_{w-1}-2}\ {}^{A}s_{m-d_{w-1}-2}\ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-2} \right)$$
gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m,n]$:

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$

$[m,n] = mw = p$

Stąd: $^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = \left({}^A s_0\, {}^A s_0, \ldots, {}^A s_{m-2}\, {}^A s_{m-2}\, {}^B s_0\, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2}\, {}^B s_{n-2}\right)$

Po $x_0^{\frac{wm}{2}}\sigma_0$ krotnej konkatenacji otrzymujemy:

$^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}\sigma_0} = \left({}^A s_1\, {}^A s_1, \ldots, {}^A s_{m-1}\, {}^A s_{m-1}\, {}^B s_1\, {}^B s_1, \ldots, {}^B s_{n-1}\, {}^B s_{n-1}\right) = {}^{(A\cup B)}f_{\sigma_0}$

Analogiczne przekształcenia uzyskujemy pod wpływem $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa $x_1 = \sigma_1\sigma_2$ .Wtedy otrzymujemy (1)

C.B.D.O.

Twierdzenie 2.

Niech $A\times B = \left({}^{(A\times B)}S, \sum, {}^{(A\times B)}M\right)$ będzie iloczynem prostym automatów $A = \left({}^A S, \sum, {}^A M\right)$ i $B = \left({}^B S, \sum, {}^B M\right)$ z klasy DFASC$_2$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(A\times B)}$ iloczynu prostego automatów $A\times B$ ma własność:

$$card\left(\overline{I(A\times B)}\right) = 2\,[m,n] \qquad (2)$$

gdzie: card (^{A}S) = m > 2; card ^{B}S = n > 2; m, n liczby naturalne m > n; card $\sum = 2$; $x_0 = \sigma_0\,\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\,\sigma_0$; [m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n.,

$k_0 = \frac{(m-d_0)}{n}$, gdzie d_0 – reszta z dzielenia liczb m, n; $b_0 = n - d_0$.

Dowód.

Na rys.1. przedstawiono automaty A i B z klasy DFASC$_2$

Wiadomo, że iloczyn prosty zbioru stanów automatu A i B wynosi:

$^{(A\times B)}S = {}^A S \times {}^B S =$

$$\left\{\begin{array}{l} \left({}^A s_0, {}^B s_0\right), \left({}^A s_1, {}^B s_0\right), \ldots, \left({}^A s_{m-2}, {}^B s_0\right), \left({}^A s_{m-1}, {}^B s_0\right), \left({}^A s_0, {}^B s_1\right), \left({}^A s_1, {}^B s_1\right), \ldots, \\ \left({}^A s_{m-2}, {}^B s_1\right), \left({}^A s_{m-1}, {}^B s_1\right), \ldots, \left({}^A s_0, {}^B s_{n-2}\right), \left({}^A s_1, {}^B s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^A s_{m-2}, {}^B s_{n-2}\right), \\ \left({}^A s_{m-1}, {}^B s_{n-2}\right), \left({}^A s_0, {}^B s_{n-1}\right), \left({}^A s_1, {}^B s_{n-1}\right), \ldots, \left({}^A s_{m-2}, {}^B s_{n-1}\right), \left({}^A s_{m-1}, {}^B s_{n-1}\right) \end{array}\right\}$$

Po przekształceniu zbioru uporządkowanych par stanów automatów A i B pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:

$$^{(A\times B)}f_{\sigma_0}=\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

Pod wpływem słowa x_0 otrzymujemy przekształcenie:

$$^{(A\times B)}f_{x_0}=\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right)\\ ,\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\ldots,\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\\ \left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right) \end{pmatrix}$$

$$^{(A\times B)}f_{x_0\sigma_1}={}^{(A\times B)}f_{x_0}$$

Po $\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{n}{2}}}=$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right) \end{pmatrix}..$$

gdzie: $d_0 = m - k_0 n$; $b_0 = n - d_0$.

Po $k_0\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{k_0\frac{n}{2}}} = \left(\begin{matrix} \left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_0\right), \left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_0\right), \\ \left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \end{matrix} \right) $$

Po $k_0 n$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{k_0 n}} = \left(\begin{matrix} \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right), \\ \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \end{matrix} \right) $$

Gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy: $d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $b_1 = n_1 - d_1$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = \left(\begin{matrix} \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right), \\ \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \end{matrix} \right) $$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:

$$ d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0; \quad [m,n] = mw = p $$

Stąd:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = \left(\begin{matrix} \left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \end{matrix} \right) $$

Po $x_0^{\frac{[m,n]}{2}} \sigma_0$ – krotnej konkatenacji otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0} = \begin{pmatrix} \left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right) \end{pmatrix} $$

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0} = {}^{(A\times B)}f_{\sigma_0} $$

Identyczną liczbę przekształceń uzyskujemy rozpoczynając przekształcenie zbioru uporządkowanych par stanów automatów A i B pod wpływem $\frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa $x_1 = \sigma_1\sigma_0$. Zatem otrzymujemy wzór 2. **C.B.D.O**

4. WNIOSKI

Dalsze prace powinny być kontynuowane przy wyznaczaniu złożoności półgrup charakterystycznych automatów asynchronicznych spójnych. Szczegółowe rozpatrywanie klas automatów asynchronicznych silnie spójnych i spójnych wynika z powszechnego stosowania tych klas automatów w realizacjach technicznych cyfrowych układów sterujących. Sterowniki przemysłowe PLC obecnie stosowane w przemyśle, a także w pojazdach szynowych wykorzystują zgodnie z normą IEC 1131 informacje ogólne o językach programowania. Oprócz tych języków stosowane są dwie metody modelowania i programowania sekwencyjnego. Metoda Grafcet podaną w normie IEC 848 oraz metoda SFC nazywana metodą grafów sekwencji objętych normą IEC 1131-3. Wspólną cechą obu metod jest formalizm sieci Petriego typu P/T (ang. Position/Transition – miejsce/tranzycja). Z chwilą gdy nastąpił zdecydowany rozwój struktur mikrosystemów cyfrowych (2001r.), które wciąż ulegają modyfikacją, następuje proces eliminacji w niektórych zastosowaniach technicznych tradycyjnych sterowników PLC. Struktury mikrosystemów cyfrowych są wielokrotnie tańsze, mniejsze gabarytowo, zużywają mniej energii, zwiększają wydajność pracy poprzez zintegrowanie składowych systemu. Wykorzystując narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy przedstawić model sterowania pojazdu szynowego w postaci grafu automatu (maszyny stanowej) i realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę graficzną zjawisk podczas symulacji sterowania pojazdem szynowym. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować lub obliczyć złożoność półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na oszacowanie złożoności programów i czasu wizualizacje stanów automatów. Mikrosystemy cyfrowe stosowane są obecnie do sterowania hamulców (tablic pneumatycznych) w lokomotywach i jednostkach elektrycznych.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Arbib M.A.: *Algebraic theory of machines languages and semigroups*, Acadimic Press, New York and London 1968.

[2] Aho A.V., Hopcrofy I.E., Ullman I.D.:*Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych,*PWN,Warszawa 1983.
[3] Barnes B.: *On the groups of automorhism of strongly connected automata,* Math.Syst. Theory 4, 4 (1970).
[4] Beatty I. C.;*On some properties of semigroup of a machine which are preserved under state minimization,* Information and Control 11, 3 (1970).
[5] Beyga L.: *On periodic sums of automata associated with isomorphism,* Foundations of Control Enginiering 1,3 (1976).
[6] Bocian S.: *Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych i ich rozszerzeń,* Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk nr 552, Warszawa, 1984.
[7] Bocian S., Mikołajczak.: *Computational aspect of assigning characteristic semigroup asychronous automata and their extensions*, Colloqia Mathematica Societatis Janos Bolyai nr 44,Amsterdam, New York, Budapest, 1985.
[8] Bocian S.: *Rozprawa doktorska*, Politechnika Poznańska,1986.
[9] Bocian S.: *The complexity of semigroup characterization of asynchronous strongly connected automaton and their extensions*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.
[10] Bocian S.: *A new method of calculating the smallest common multiple*, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.
[11] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, jako model matematyczny automatu w technice komputerowej,* Pojazdy szynowe 1/2002.
[12] Bocian S.: *Złożoność pólgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIII INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT,* Zakopane 2009.
[13] Bocian S.: *Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych,* OR – 9834 (praca nie publikowana).
[14] Fleck A.C.: *Isomorphism groups of automata,* J. Assoc. Comp. Mach. 9, 4 (1962).
[15] Gecseg F.,Peak J.: *Algebraic theory of automata*, Akademia Kiado, Budapest, 1972.
[16] Grzymała-Busse J.W.: *On the periodic reprezentation and reducibility of periodic automata*, J.Assoc. Comput. Mach. 16, 3(1969).
[17] Grzymała-Busse J.W.: *On the endomorphisms of finite automata,* Mach. Syst. Theory 4, 4 (1970).
[18] Grzymała-Busse J.W.: *Podautomaty automatów skończonych związane ze zmianączsu pracy,* Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.46, Poznań, 1972.
[19] Kerntopf P.: *Podstawowe pojęcia matematyczne w teorii automatów,* PWN, Warszawa 1967.
[20] Mikołajczak B., Miądowicz Z.: *On the automorphisms group of strongly related automata and structural properties of finite automata and extensions,* Foundations of Control Engineering,1,2 (1976).
[21] Mikołajczak B.: *On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums,* Technical Report, Computer Science Department, Cornell University, 1977.

[22] Mikołajczak B.: *On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums*, Foundations of Control Engineering, 3,1 (1978).
[23] Mikołajczak B.: *Uogólnione przekształcenia okresowe automatów skończonych,* Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.98, Poznań 1979.
[24] Mikołajczak B.: *Algebraiczna i strukturalna teoria automatów,* PWN Warszawa - Łódź, 1985.
[25] Mikołajczak B.: *Przekształcenia i złożoność obliczeniowa problemów w teorii automatów*, PWN Warszawa – Poznań, 1988.
[26] Oehmke R.H.: *The semigroup of a strongly connected automaton,* Math. Systems Theory, 15 (178).

Praca wykonana w ramach Projektu Badawczego KBN nr N N509 398236 „Mikrosystemy cyfrowe do inteligentnego, rozproszonego i współbieżnego sterowania pojazdami szynowymi."