

*powłoka walcowa, metoda elementów skończonych, stateczność statyczna i dynamiczna, metoda bilansu harmonicznych, metoda całkowania bezpośredniego, wymuszenie harmoniczne*

Sławomir STACHURA<sup>1</sup>

### STATECZNOŚĆ POWŁOKI WALCOWEJ POD OBCIĄŻENIEM HARMONICZNYM

*Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności dynamicznej powłoki walcowej pod obciążeniem harmonicznym, przyłożonym w płaszczyźnie środkowej. Utrata stateczności powłoki wzdłużnie ściskanej dynamicznie, związana jest z wystąpieniem rezonansu parametrycznego między drganiami podłużnymi i giętnymi. Badanie tego procesu wymaga uwzględnienia w równaniach różniczkowych ruchu osiowych sił bezwładności jako, że drgania rezonansu parametrycznego są wynikiem wymiany energii drgań podłużnych i poprzecznych. Wyniki analiz przedstawiono w postaci map (Ince-Strutta) obszarów niestatecznych oraz przebiegów drgań giętych powłoki.*

### STABILITY OF CYLINDRICAL SHELL LOADED WITH HARMONIC FORCES

*The subject of this paper is a problem of dynamic stability cylindrical shell loaded by the harmonic forces. Loss of stability of the shell loaded dynamic compression axial forces may be interpreted by the parametric resonance between longitudinal vibration and transverse vibration. Examination of this process must take into account axial forces of inertia. The maps of unstable areas and deflections of shell is received.*

## 1. RÓWNANIA RUCHU

Małe drgania giętne powłoki pod obciążeniem wzdłużnym ściskającym opisane są równaniami liniowymi [3]

$$\frac{D}{h} \nabla^8 w + p \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 w + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^4 w = 0 \quad (1.1)$$

W pracy, przyjęto model obciążenia w postaci  $p(t) = \alpha p^s + \beta p^z \cos \theta t$ , (gdzie parametry  $\alpha$  i  $\beta$  są mnożnikami poszczególnych części obciążenia całkowitego). Stosując metodę elementów skończonych [1], otrzymano równania ruchu postaci

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K - \alpha A - \beta \Pi \cos \theta t)q = 0 \quad (1.2)$$

gdzie; odpowiednio macierze:  $M$  – masy,  $C$  – tłumienia,  $K$  – sztywności,  $A$ ,  $\Pi$  oraz  $K_g$  – wstępnych naprężeń oraz sztywności geometrycznej.

<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny; 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54

W obliczeniach przyjęto model tłumienia Rayleigha, ponieważ dla drgań wymuszonych stacjonarnym sygnałem harmonicznym z częstotliwością  $\theta$ , w strefie rezonansowej, w której tłumienie jest istotne zachodzi  $\theta \approx \omega$  ( $\omega$  - częstość drgań własnych układu); wówczas macierz tłumienia można zapisać

$$C\dot{q} = 2\frac{\gamma}{\theta}(K - K_g)\dot{q} \quad (1.3)$$

gdzie:  $\gamma$  - oznacza stosunek tłumienia rzeczywistego do tłumienia krytycznego, zwany tłumieniem postaciowym lub współczynnikiem strat.

Zależność (1.2) stanowi układ równań typu Mathieu. Takimi równaniami opisane jest zjawisko dynamicznej utraty stateczności układu [2], zachodzącej na skutek wystąpienia rezonansu parametrycznego. Do analizy tych równań można między innymi stosować: metody bezpośredniego całkowania numerycznego oraz metody zakładające rozwiązanie w postaci szeregów, do której należy metoda bilansu harmonicznym [2, 4].

## 2. METODA BILANSU HARMONICZNYCH

Układ równań (1.2) ma rozwiązania okresowe o okresach  $T$  i  $2T$ , a zatem wyznaczone dla tych rozwiązań częstości będą stanowić granicę obszarów niestatecznych (rezonansowych) i statecznych (nieresonansowych).

Założymy rozwiązanie układu równań (1.2) w postaci nieparzystego szeregu Fouriera o okresie  $2T$  [1]

$$q = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{1}{2}k\theta t + b_k \cos \frac{1}{2}k\theta t) \quad (2.1)$$

gdzie:  $a_k$  i  $b_k$  - wektory niezależne od czasu, o wymiarze globalnych stopni swobody  $n$  układu.

$$\begin{vmatrix} K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & 0 & -\frac{3}{2}\theta C & - \\ -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\theta C & 0 & - \\ 0 & \frac{1}{2}\theta C & K - \alpha\Lambda - \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & - \\ -\frac{3}{2}\theta C & 0 & -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & - \\ | & | & | & | & | \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

Podstawiając (2.1) do (1.2) otrzymamy jednorodny algebraiczny układ równań, dla którego warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań jest zerowanie się nieskończonego wyznacznika (2.2).

Analogicznie jest z uzyskaniem rozwiązania (1.2), jeśli założymy rozwiązanie w postaci parzystego szeregu Fouriera o okresie  $T$

$$q = \frac{1}{2}b_0 + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{1}{2}k\theta + b_k \cos \frac{1}{2}k\theta) \quad (2.3)$$

otrzymamy nieskończony wyznacznik postaci

$$\begin{vmatrix} K - \alpha\Lambda - 4\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & 0 & 0 & -2\theta C & \dots \\ -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - \theta^2 M & 0 & -\theta C & 0 & \dots \\ 0 & 0 & K - \alpha\Lambda & -\beta\Pi & 0 & \dots \\ 0 & \theta C & -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - \theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & \dots \\ 2\theta C & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - 4\theta^2 M & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4)$$

Zatem, analiza stateczności dynamicznej konstrukcji polega na wyznaczeniu granic obszarów rezonansów, to znaczy wyznaczeniu funkcji częstości wymuszenia  $\theta = f(\alpha, \beta)$ , w dziedzinie mnożników obciążenia. Przy pominięciu tłumienia początek obszarów rezonansowych rozpoczyna się według zależności

$$\theta_{\alpha j} \cong \frac{2\omega_{\alpha j}}{p} \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, 3, \dots) \\ (p = 1, 2, 3, \dots) \end{matrix} \quad (2.5)$$

Dla częstości własnej  $\omega_{\alpha j}$  jest odpowiednio: przy  $p = 1$  jest  $\theta_{\alpha j} = 2\omega_{\alpha j}$  i jest to rezonans główny, który rozpoczyna się od podwójnej częstości własnej; dla  $p = 2$  jest  $\theta_{\alpha j} = \omega_{\alpha j}$  - rezonans poboczny, dla  $p = 3$  jest  $\theta_{\alpha j} = (2/3)\omega_{\alpha j}$  i jest to również rezonans poboczny, itd.

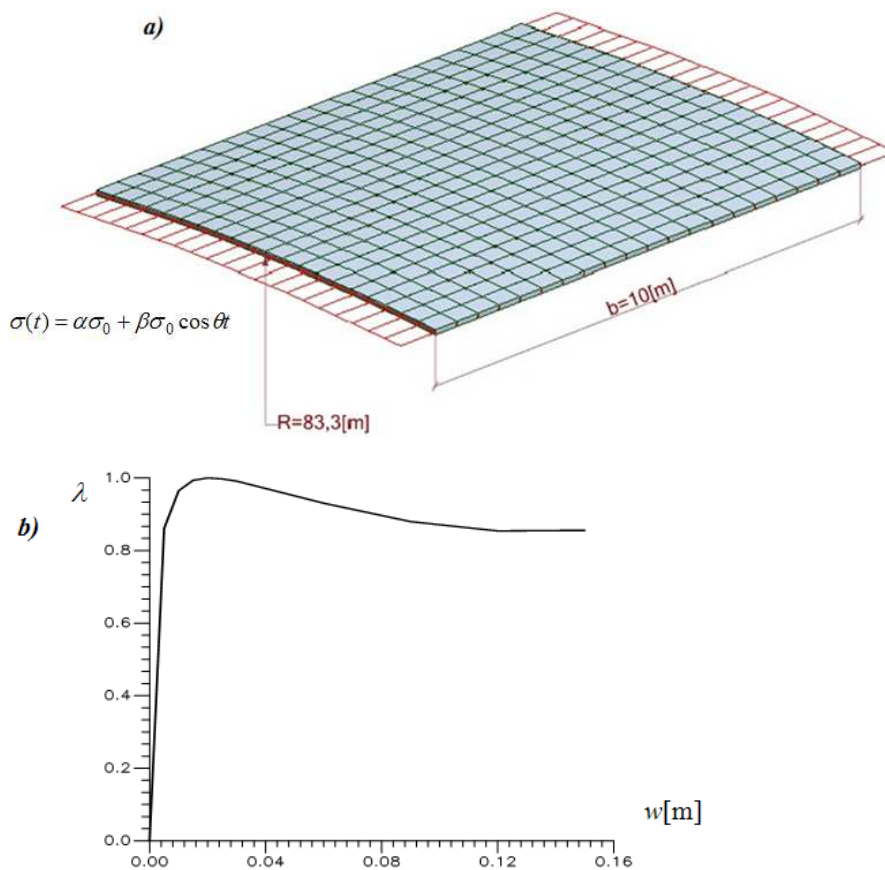
Wyznaczniki (2.2) i (2.4) są wyznacznikami o nieskończonych wymiarach (i są bezwzględnie zbieżne [1]), a zatem liczba wyrazów, które uwzględnimy rzutuje na dokładność wyznaczonych częstości w następujący sposób. Jeśli z wyznacznika (2.2) utworzyć podwyznacznik zaznaczony linią punktową, to wyznaczany jest główny obszar niestateczny, a dokładnie jego pierwsze przybliżenie. Podwyznacznik ten odpowiada przyjęciu postaci szeregu (2.1) dla  $k = 1$ . Dalej dla  $k = 3$  zwiększana jest dokładność rozwiązania głównego obszaru niestatecznego i wyznaczamy zgrubnie następny poboczny obszar niestateczny, którego początek rozpoczyna się od wartości  $\theta_{\alpha j} = (2/3)\omega_{\alpha j}$ , itd.

Wartości częstości  $\theta_{\alpha k}$  zawarte w przedziale dwóch sąsiednich częstości  $\theta_{\alpha j}$  i  $\theta_{\alpha j+1}$  wyznaczają przedział rozwiązań niestatecznych - obszar rezonansowy, np. o okresie  $T$  i  $2T$ .

Natomiast obszar zawarty między rozwiązaniami o dwóch różnych okresach  $T$  i  $2T$  jest obszarem rozwiązań statecznych.

### 3. OBLICZENIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ

Rozpatrzono powłokę o kształcie paneli walcowej (Rys.3.1a), podpartą przegubowo na całym obwodzie [5]. Dane materiałowe betonu B45 i geometryczne są następujące:  $E = 3.4 \cdot 10^4$  [MPa],  $\nu = 0,2$ , grubość  $\delta = 10$  [cm], długości i szerokości mierzonej wzdłuż łuku kołowego  $b = 10$  [m], wyniosłość  $f = 0,15$  [m], promień  $R = 83,3$  [m].

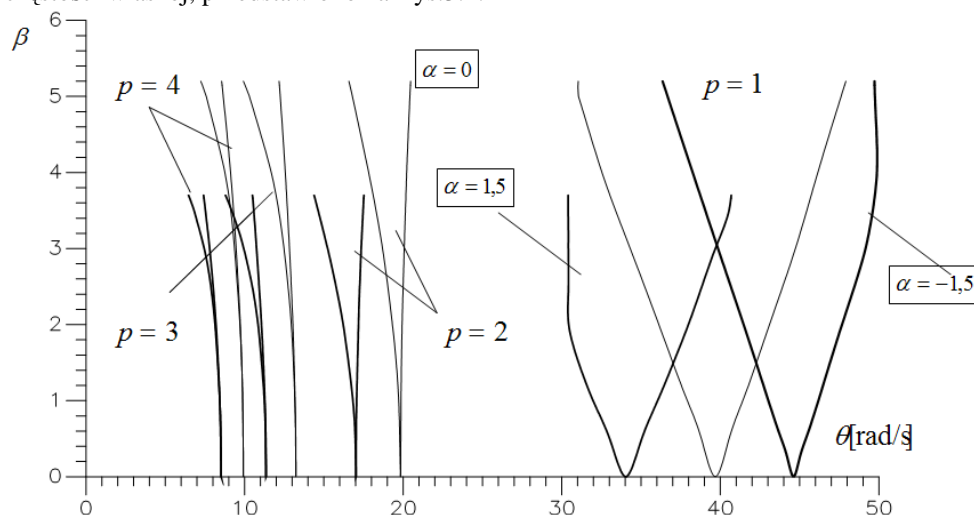


Rys.3.1. a) model powłoki, b) krzywa równowagi statycznej

Na powłokę działa obciążenie zmienne w czasie, wywołując naprężenia

$$\sigma(t) = \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_0 \cos \theta t, \quad \sigma_0 = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \quad (3.1)$$

Do obliczeń, przyjęto odpowiednio wartości obciążenia stałego:  $\alpha \in \{0; 1,5; -1,5\}$  i wyznaczono obszary rezonansowe pierwszych czterech rzędów  $p = 1, 2, 3, 4$  - pierwszej częstotliwości własnej, przedstawiono na Rys.3.2.



Rys.3.2. Granice obszarów dla  $p=1,2,3,4$  pierwszej częstotliwości rezonansowej.

Widocznym jest, że obszary niestateczne są największe dla  $p=1$  - rezonansu głównego. Jednakże, w przypadku tzw. „rozpędzania się wymuszenia” częstotliwości wymuszenia znajdują się w pozostałych obszarach rezonansowych  $p = 2, 3, 4$ . Uwzględniając tłumienie, aby wystąpił rezonans potrzebna jest pewna niezerowa wartość głębokości modulacji  $\beta$  - o większej wartości dla wyższych rzędów rezonansowych.

#### 4. WYZNACZENIE DRGAŃ POWŁOKI ZA POMOCĄ ZMODYFIKOWANEJ METODY NEWMARKA CAŁKOWANIA BEZPOŚREDNIEGO

Całkowanie bezpośrednie równań ruchu oparte jest na dwóch ideach; po pierwsze, zamiast spełniać równania ruchu (1.2) dla dowolnej chwili  $t$ , to należy spełnić te równania tylko w dyskretnych chwilach, w odległości  $\Delta t$  jedna od drugiej. To oznacza, że poszukiwana jest równowaga statyczna uwzględniająca wpływ sił bezwładności i tłumienia w dyskretnych punktach czasu; po drugie, zmiany przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń zakładane są w każdym przedziale czasu  $\Delta t$ .

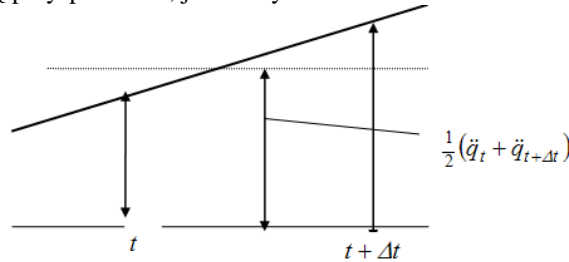
Na wstępie zakładamy, że wektory przemieszczeń  $\mathbf{q}_0$ , prędkości  $\dot{\mathbf{q}}_0$  i przyspieszeń  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  w chwili  $0$  są znane i przyjmujemy, że rozwiązanie (1.2) jest poszukiwane od chwili  $0$  do czasu  $T$ . W rozwiązaniu, czas  $T$  jest podzielony na  $n$  równych przedziałów czasowych  $\Delta t$  tj.  $\Delta t = T/n$ , a stosowany schemat całkowania określa przybliżone rozwiązanie dla chwili  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ .

W metodzie całkowania Newmarka podstawowe wyrażenia, na aproksymację prędkości i przemieszczenia w chwili  $t + \Delta t$  są następujące:

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + [(1-\delta)\ddot{\mathbf{q}}_t + \tilde{\alpha}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (4.1)$$

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t\Delta t + (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t + \tilde{\alpha}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} \right] \quad (4.2)$$

gdzie:  $\tilde{\alpha}$  i  $\delta$  są parametrami, które określają dokładność i stabilność metody. Zakładając pewne stało-średnie przyspieszenie, to jest przyjmując parametry  $\tilde{\alpha}=1/4$  i  $\delta=1/2$ , otrzymamy zmianę przyspieszenia, jak na Rys.4.1.



Rys.4.1. Założenie stałego-średniego przyspieszenia

Wyznaczając z (4.2) przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$  i podstawiając do (4.1), otrzymamy zależności  $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$  i  $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$  w funkcji przemieszczenia  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$  (oraz znanych wartości  $\ddot{\mathbf{q}}_t$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_t$  i  $\mathbf{q}_t$ )

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\tilde{\alpha}(\Delta t)^2} \left[ \mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t - \dot{\mathbf{q}}_t\Delta t - (\Delta t)^2 \left( \frac{1}{2} - \tilde{\alpha} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \right] \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \frac{\delta}{\tilde{\alpha}\Delta t} (\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t) + \left( 1 - \frac{\delta}{\tilde{\alpha}} \right) \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t \left( 1 - \frac{\delta}{2\tilde{\alpha}} \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \quad (4.4)$$

Podstawiając powyższe zależności do równań ruchu (1.2), dla chwili czasu  $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

gdzie:  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \alpha\mathbf{1} - \beta\mathbf{\Pi} \cos \theta$ .

Wówczas równania ruchu są postaci

$$\left( \frac{1}{\tilde{\alpha}(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\tilde{\alpha}\Delta t} \mathbf{C} + \hat{\mathbf{K}} \right) \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{M} \left( \frac{1}{\tilde{\alpha}(\Delta t)^2} \mathbf{q}_t + \frac{1}{\tilde{\alpha}\Delta t} \dot{\mathbf{q}}_t + \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\delta}{\tilde{\alpha}\Delta t} \mathbf{q}_t + \left( \frac{\delta}{\tilde{\alpha}} - 1 \right) \dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\tilde{\alpha}} - 1 \right) \ddot{\mathbf{q}}_t \right) \quad (4.6)$$

Z powyższego układu wyznaczamy wektor przemieszczeń  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ , a następnie z (4.3) i (4.4) wyznaczmy przyspieszenia  $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$  i prędkości  $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ .

Algorytm bezpośredniego całkowania równań ruchu metodą Newmarka, zmodyfikowany dla równań ruchu (4.5), o zmiennej macierzy sztywności  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} - \alpha\mathbf{1} - \beta\mathbf{\Pi} \cos \theta$ , przy zerowym wektorze wymuszenia siłowego - jest następujący:

#### A. Obliczenia wstępne

1. Utworzenie macierzy: sztywności  $\mathbf{K}$ , masy  $\mathbf{M}$  i tłumienia  $\mathbf{C}$

2. Zadanie początkowych wartości:  $q_0$ ,  $\dot{q}_0$  i  $\ddot{q}_0$
3. Wybór długości kroku czasu  $\Delta t$  i wartości parametrów  $\delta$  i  $\tilde{\alpha}$  oraz obliczenie stałych całkowania,

$$a_0 = \frac{1}{\tilde{\alpha}(\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\tilde{\alpha}\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\tilde{\alpha}\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} - 1, \quad a_4 = \frac{\delta}{\tilde{\alpha}} - 1,$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\delta}{\tilde{\alpha}} - 2 \right), \quad a_6 = \Delta t(1 - \delta), \quad a_7 = \delta\Delta t$$

*B. Obliczenia na typowym kroku czasu  $\Delta t$*

1. Utworzenie efektywnej macierzy sztywności  $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = \hat{K} + a_0 M + a_1 C$$

$$\text{gdzie: } \hat{K} = K - \alpha A - \beta \Pi \cos \theta$$

2. Rozkład macierzy  $\tilde{K}$

$$\tilde{K} = LDL^T$$

3. Obliczenie efektywnego wektora obciążenia

$$\tilde{R}_{t+\Delta t} = M(a_0 q_t + a_2 \dot{q}_t + a_3 \ddot{q}_t) + C(a_1 q_t + a_4 \dot{q}_t + a_5 \ddot{q}_t)$$

4. Rozwiązanie względem wektora przemieszczeń w chwili  $t + \Delta t$

$$LDL^T q_{t+\Delta t} = \tilde{R}_{t+\Delta t}$$

5. Wyznaczenie wektorów przyspieszenia i prędkości w chwili  $t + \Delta t$

$$\ddot{q}_{t+\Delta t} = a_0 (q_{t+\Delta t} - q_t) - a_2 \dot{q}_t - a_3 \ddot{q}_t$$

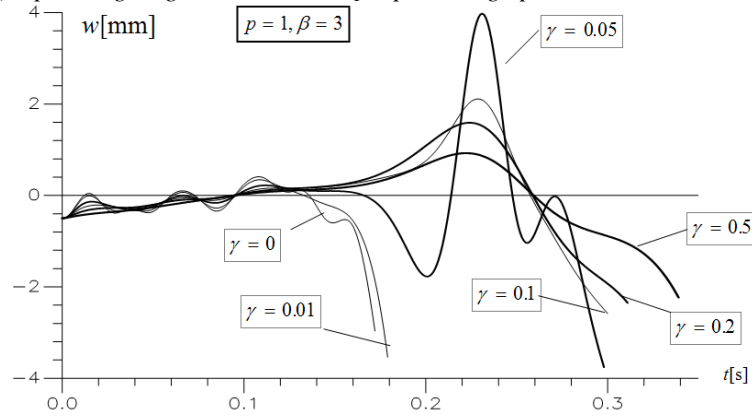
$$\dot{q}_{t+\Delta t} = \dot{q}_t + a_6 \ddot{q}_t + a_7 \ddot{q}_{t+\Delta t}$$

Metoda Newmarka jest bezwarunkowo stabilna [1] dla  $\delta \geq 0.5$  i  $\tilde{\alpha} \geq 0.25(\delta + 0.5)^2$ ; zazwyczaj przyjmuje się  $\delta = 0.5$  i  $\tilde{\alpha} = 0.25$ . W metodzie tej nie występuje tzw. tłumienie pasożytnicze, które powoduje niestabilność numeryczną rozwiązania.

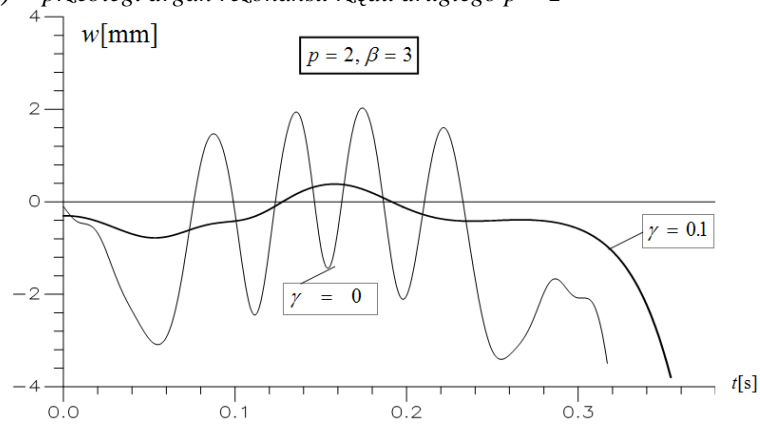
Przechodząc do wyników rozwiązania powłoki, w postaci przebiegów drgań (Rys.4.2), można zauważyć, że utrata stateczności statycznej powłoki jest typu przeskoku (Rys.3.1b), co znajduje potwierdzenie w przebiegu drgań (Rys.4.2); wyznaczone przebiegi drgań dotyczą punktu centralnego powłoki. Zjawisku przeskoku towarzyszą zawsze drgania, z którymi związana jest dodatkowo energia kinetyczna, powodując w krótkim czasie wzrost amplitudy do bardzo dużych wartości.

Przyjęcie dużego tłumienia, także nie ogranicza wartości amplitud. Również, wprowadzenie rozciągającego obciążenia stałego ( $\alpha < 0$ ), w małym stopniu wpływa na ograniczenie amplitud rezonansowych.

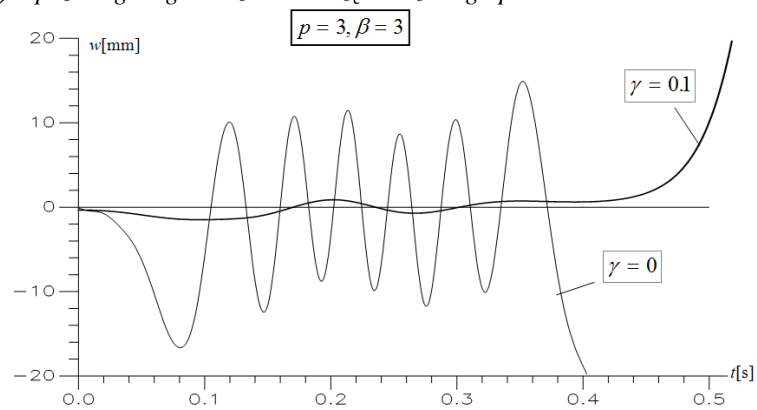
a) przebiegi drgań rezonansu rzędu pierwszego  $p = 1$



b) przebiegi drgań rezonansu rzędu drugiego  $p = 2$

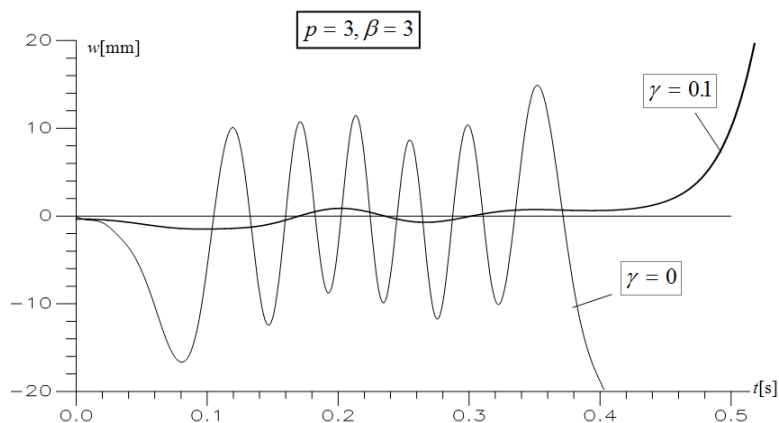


c) przebiegi drgań rezonansu rzędu trzeciego  $p = 3$

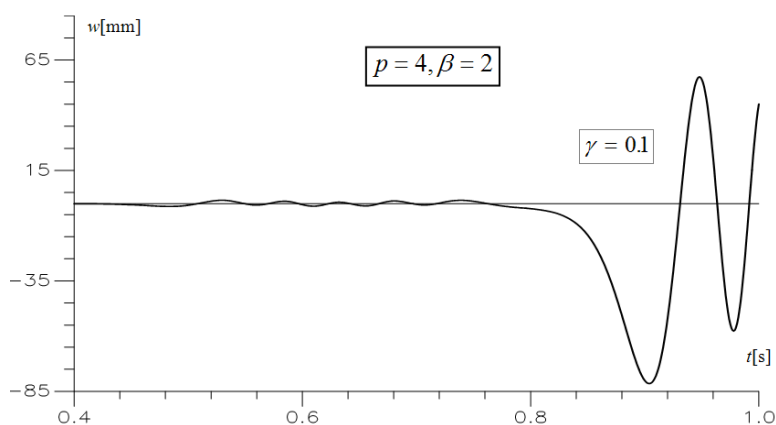




d) przebiegi drgań rezonansu rzędu trzeciego  $p = 3$



e) przebiegi drgań rezonansu rzędu czwartego  $p = 4$



Rys.4.2. Drgania rezonansowe powłoki

## 5. WNIOSKI

Dla rzeczywistych konstrukcji budowlanych, na ogół bardzo złożonych, przy analizie stateczności dynamicznej, otrzymamy zapis równań ruchu typu Mathieu, do rozwiązania którego efektywna jest wówczas metoda bilansu harmonicznego. Ponadto, stosując metodę elementów skończonych możemy rozwiązać szeroką klasę konstrukcji rzeczywistych, o dowolnych parametrach konstrukcyjnych z uwzględnieniem wpływu istotnych czynników jak np.: dodatkowe obciążenie stałe, tłumienie, imperfekcje geometryczne i obciążeniowe.

Porównując zastosowane w pracy dwie metody analizy stateczności dynamicznej, można stwierdzić, że uzyskanie rozwiązania w postaci obszarów statecznych i

niestatecznych za pomocą metody bilansu harmonicznym, jest zdecydowanie mniej czasochłonne, niż metodą całkowania bezpośredniego. Tą ostatnią, można traktować raczej jako weryfikującą dla metody bilansu harmonicznym: wystąpił czy nie wystąpił rezonans parametryczny układu, przy ustalonych wartościach parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  układu.

Uogólniając, jeżeli zmienimy sztywność układu poprzez dodanie obciążenia wstępnego rozciągającego, to jest możliwym, aby układ aktualnie rezonansowy przekształcić do układu nierezonansowego. Natomiast, wprowadzając obciążenia wstępne ściskające, zmierzamy do przekształcenia układu w rezonansowy. Stabilizacja układu za pomocą obciążenia wstępnego jest tym bardziej skuteczne, im większa jest sztywność układu na kierunku przykładanego obciążenia, bowiem wówczas można wprowadzić większą wartość obciążenia wstępnego.

W przypadku konstrukcji o charakterystyce typu przeskoku dla statycznej utraty stateczności, jaką posiada analizowana powłoka, stabilizacja za pomocą obciążenia wstępnego rozciągającego jest w bardzo małym stopniu skuteczna.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bołotin B.B., *Dinamiczieskaja ustojcziwost uprugich sistem*, Gos. Izd. Tech. -Teor. Lit., Moskwa 1956.
- [2] Kojić M., Bathe K.J., *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005.
- [3] Gryboś R., *Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym*, PWN Warszawa 1980.
- [4] Stachura S., *Analiza stateczności kopuły prętowej*, Logistyka nr 6/2010.
- [5] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*, Warszawa, Arkady 1990.