

*konstrukcja rusztowa, wrażliwość konstrukcji, metoda elementów skończonych,  
nieliniowe obliczenia statyczne,  
stateczność statyczna i dynamiczna*

Sławomir STACHURA<sup>1</sup>

## OCENA WRAŻLIWOŚCI KONSTRUKCJI TYPU RUSZT

*Stropowe konstrukcje stalowe, dla których modelem obliczeniowym jest ruszt stosowane są jako układy nośne w budownictwie np. w budowlach o przeznaczeniu magazynów.*

*W pracy przeprowadzono analizę statyczną liniową i nieliniową oraz weryfikację wrażliwości rusztu na zjawisko utraty stateczności statycznej i dynamicznej.*

*Zastosowano aktualizację opisu geometrii konstrukcji na każdym kroku przyrostu obciążenia, w uaktualnionym opisie Lagrange'a, a do rozwiązania równań równowagi zastosowano metodę Newtona-Raphsona, z aktualizacją macierzy na każdym kroku przyrostu obciążenia i po każdej iteracji.*

## SENSITIVITY ASSESSMENT OF GRILLAGE TYPE STRUCTURES

*Steel floor structures for which the grillage is a computational model, are used as carrying systems in building engineering, e.g. in buildings intended for warehouses.*

*The linear and nonlinear static analysis was carried out as well as the verification of grillage sensitivity to the effect of stability loss.*

*Updating of structure geometry description with every step of load increment and updated Lagrange description was applied, and for solution of equilibrium equations the Newton-Raphson method was used with matrix updating with every step of load increment and after each iteration.*

### 1. WSTĘP

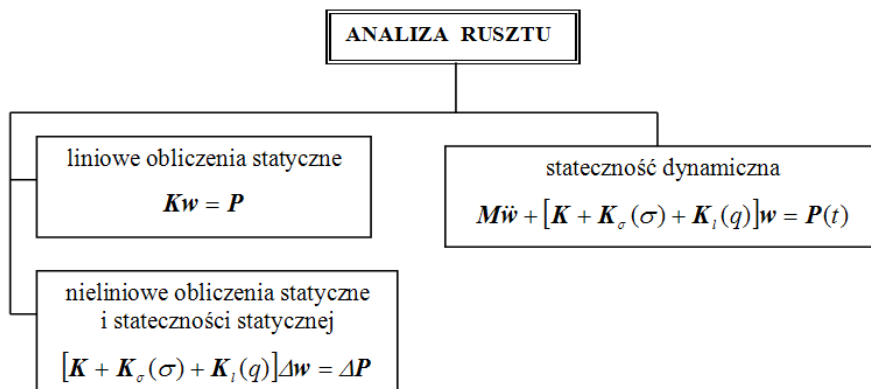
W pracy zamieszczono obliczenia rusztu, jako nośnej konstrukcji stalowej stropu, budynku przeznaczonego do składowania, kategoria E1 [6] tj. powierzchnie składowania, z włączeniem składowania książek i innych dokumentów.

Zastosowano analizę liniową i nieliniową, przy wykorzystaniu której otrzymujemy wynik bardziej zbliżony do stanu rzeczywistego, występującego w konstrukcji.

W pracy zastosowano metodę przyrostową, w której obliczenia przeprowadzane są etapowo, zwiększając obciążenie na każdym etapie o pewien przyrost oraz znajdując odpowiadający mu przyrost przemieszczeń.

---

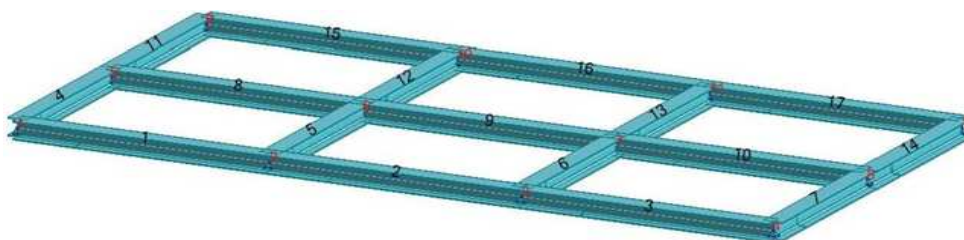
<sup>1</sup> Politechnika Radomska, Wydział Mechaniczny; 26-600 Radom, ul. Krasickiego 54



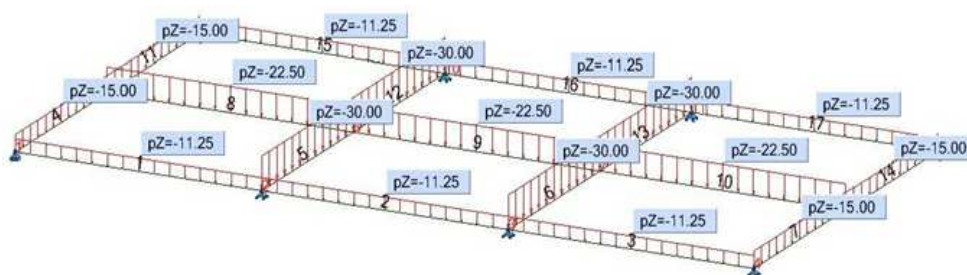
Rys.1. Zastosowane w pracy rodzaje analiz

## 2. LINIOWE OBLICZENIA STATYCZNE

W pierwszej kolejności wykonano liniową analizę statyczną rusztu o wymiarach (12 x 6)m, Rys.2. Przyjęto przekrój poręczny belek w postaci dwuteownika HEB 300, materiał



Rys.2. Konstrukcja rusztu



Rys.3. Obciążenie rusztu

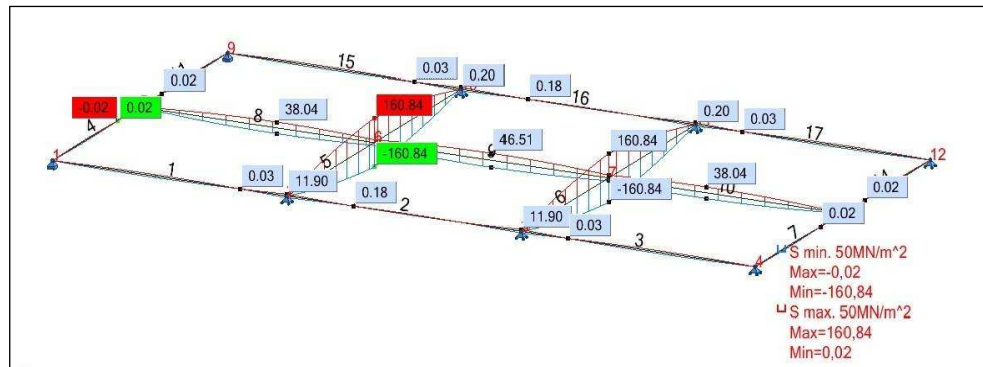
stal P355N (18G2A), o wytrzymałości obliczeniowej na rozciąganie, ściskanie i zginanie  $f_d = 370 \text{ MPa}$ . Obciążenie charakterystyczne  $q_k$  przyjęto według [6]  $q_k = 7,5 \text{ kN/m}^2$  (Rys.3) dla obciążenia stropów od składowania, kategoria E1 tj. powierzchnie składowania, z włączeniem składowania książek i innych dokumentów.

Rozwiązanie rusztu wykonano wykorzystując zapis metody elementów skończonych w programie Robotat [4], a także programami autorskimi, szczegółowe wyprowadzenie obiektów macierzowych przestrzennego elementu belkowego zawarto w [2, 3]. Wyniki z rozwiązania rusztu z liniowych obliczeń statycznych, w postaci rozkładu naprężeń normalnych oraz deformacji przedstawiono na rys.4 i 5.

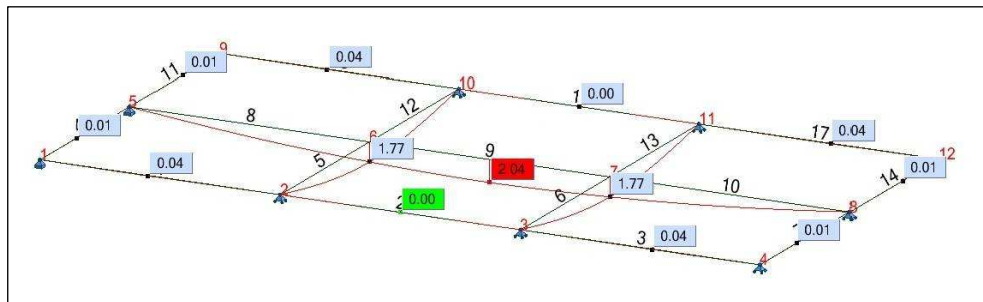
### 3. NIELINIOWE OBLICZENIA STATYCZNE

Zmieniając rodzaj podpór w węzłach z przesuwnych na stałe, to w rozwiązaniu wystąpią rozciągające siły normalne i wówczas mamy problem nieliniowej analizy statycznej rusztu, wynikający z nieliniowych związków geometrycznych

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (1)$$



Rys.4. Rozkład naprężeń normalnych od momentów gnących



Rys.5. Deformacja rusztu

W rozwiązaniu nieliniowym wystąpią dodatkowo: siły normalne  $F_x$ , siła tnąca  $F_y$  oraz moment gnący  $M_z$ . Wynika to z zastosowania nieliniowych związków geometrycznych, uwzględniających wpływ ugięcia na przemieszczenie wzdłużne (siła normalna  $F_x$ ) oraz kąta odkształcenia postaciowego (siła tnąca  $F_y$  i związanego z tą siłą momentu gnącego  $M_z$ ).

Porównując wyniki z analiz liniowej i nieliniowej można stwierdzić, że dla sił wewnętrznych zachodzą niewielkie zmiany ich wartości i tak dla:

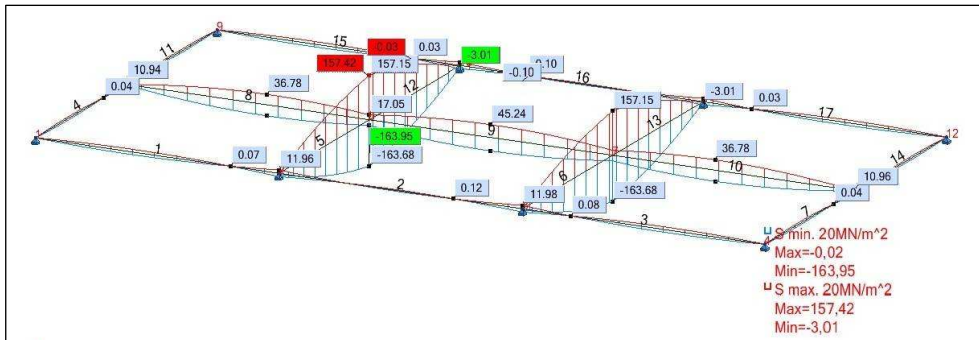
- siły tnącej  $F_z$  - zmniejszenie wartości o 0,2%,
- momentu skręcającego  $M_x$  – bez zmiany wartości,
- momentu gnącego  $M_y$  - zmniejszenie wartości o 0,3%,
- ugięcia maksymalnego  $w_{\max}$  - bez zmiany wartości;

co świadczy o tym, iż ruszt dla przyłożonego obciążenia  $q_k = 7,5 \text{ kN/m}^2$  zachowuje mocno zbliżony do liniowego charakter pracy.

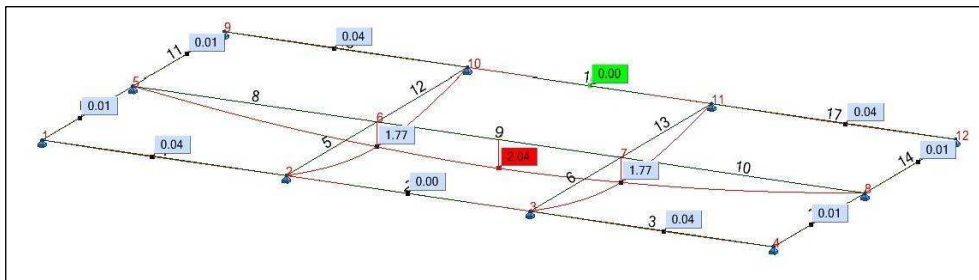
W praktyce projektowej, muszą być spełnione warunki normatywne, jednym z tych warunków jest, aby maksymalne ugięcie nie przekroczyło ugięcia granicznego, które wynika ze stanu granicznego użytkowania (SGU). Dla rusztu będzie (rys.7)

$$w_{\max} = 2,04 \text{ cm} < f_{gr} = l_d / 250 = 600 / 250 = 2,4 \text{ cm} \quad (2)$$

i to spełnienie tego warunku determinuje dużą sztywność rusztu, a tym samym i zbliżony do liniowego zakres pracy rusztu.



Rys.6. Rozkład naprężeń normalnych od siły normalnej i momentów gnących



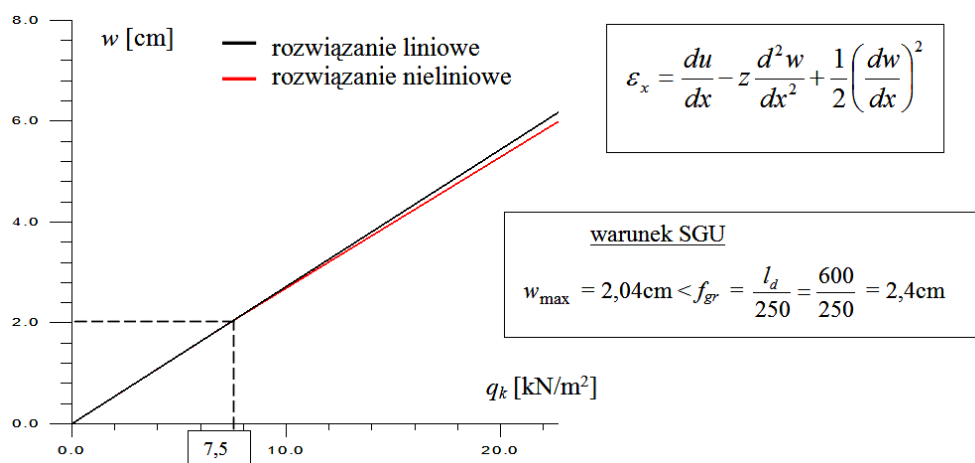
Rys.7. Deformacja rusztu

Do wymiarowania konstrukcji stalowych dochodzą jeszcze warunki związane z siłami wewnętrznymi tzw. stan graniczny nośności, który to wymaga spełnienia dodatkowych warunków związanych np. ze statecznością miejscową, lokalną, imperfekcjami geometrycznymi, zwichrzeniem itd.– poszczególnych fragmentów przekroju poprzecznego belki, także ogranicza możliwość wystąpienia nieliniowej pracy konstrukcji przy prawidłowych warunkach eksploatacji.

Następnie, wyznaczono krzywą równowagi rusztu tj. zależność ugięcia  $w$  w funkcji obciążenia  $q_k$  - rys.8, tab.1.

Tab.1. Wyniki analizy nieliniowej rusztu

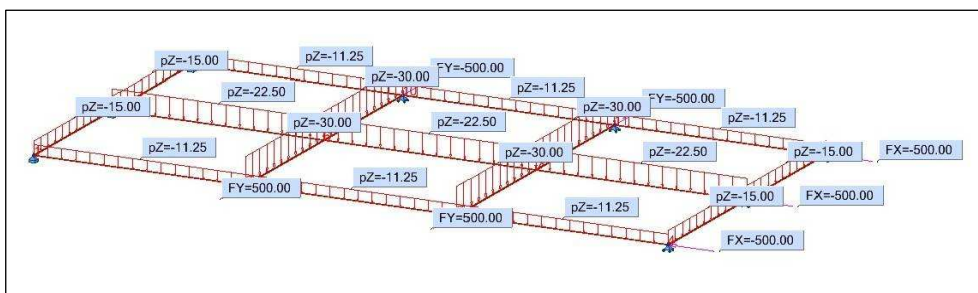
$q_k$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$w$ [cm]	$F_x$ [kN]	$\sigma_{F_x}$ [MPa]	$M_y$ [kNm]	$M_z$ [kNm]	$\sigma_{M_y}$ $\sigma_{M_z}$ [MPa]	$\sigma^g$ $\sigma^d$ [MPa]
7,5	2,04	-48,6	-3,3	269,0	0,20	$\pm 160,3$ $\pm 0,3$	157,4 -163,9
15,0	3,99	-97,2	-6,5	526,4	0,41	$\pm 313,7$ $\pm 0,7$	307,9 -320,9
22,5	5,94	-145,8	-9,8	783,9	0,61	$\pm 467,1$ $\pm 1,0$	458,4 -477,9
30,0	7,89	-194,4	-13,1	1041,3	0,81	$\pm 620,5$ $\pm 1,4$	608,9 -635,0
Rozwiązanie liniowe							
7,5	2,04	0,0	0,0	269,9	0,0	$\pm 160,8$	$\pm 160,8$

Rys.8. Zależność ugięcia  $w$  od obciążenia  $q_k$  rusztu

W zakresie przykładanych obciążeń  $q_k$  wykresy ugięcie – obciążenie w małym stopniu odbiegają od rozwiązania liniowego, nawet dla dużych naprężeń, zbliżonych do granicy wytrzymałości na rozerwanie  $R_m=560\text{MPa}$ . Dla konstrukcji rusztu oznacza to, że obliczenia z teorii liniowej są miarodajnymi w procesie jego projektowania.

### 3. NIELINIOWA ANALIZA STATECZNOŚCI RUSZTU

W celu oceny wrażliwości konstrukcji rusztu, w sytuacji wystąpienia dodatkowego obciążenia osiowego (rys.9), wywołującego ściskające siły normalne, przy równocześnie działającym stanie zgięciowym od obciążenia użytkowego  $q_k$  - wykonano analizę nieliniowej stateczności.



Rys.9. Obciążenie rusztu dla nieliniowej analizy stateczności

Z przebiegu zależności: ugięcie w funkcji ściskającej siły normalnej  $F_x$  (tab.2) widocznym jest wyraźnie nieliniowy charakter pracy rusztu. Jednak, ze względu na warunek, aby maksymalne ugięcie nie przekroczyło ugięcia granicznego które to, wynika ze stanu granicznego użytkowania

$$w_{\max} \leq f_{gr} = 2,4\text{cm} \quad (3)$$

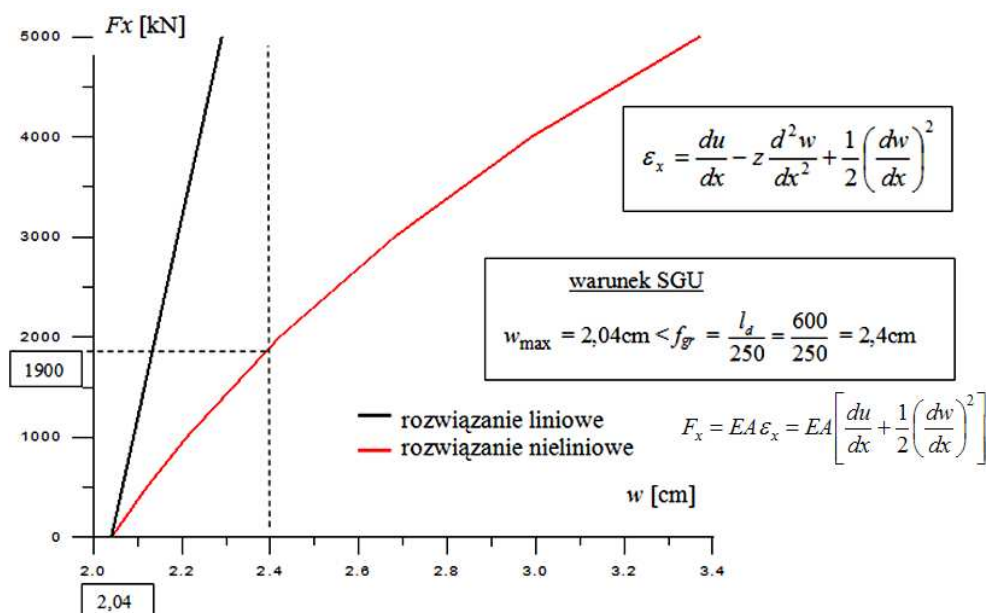
to maksymalne siły osiowe nie mogą przekraczać wartości około  $F_x = 1900\text{kN}$ , bowiem wówczas  $w = w_{\max} = 2,4\text{cm}$ , z rozwiązania nieliniowego stateczności.

Z rozwiązania liniowego, nawet przy maksymalnych siłach osiowych  $F_x = 5000\text{kN}$  (rys.10), otrzymamy ugięcie  $w = 2,29\text{cm}$ , które spełnia warunek stanu granicznego  $2,29 < 2,4$ . Natomiast, z rozwiązania nieliniowego ugięcie wynosi  $w = 3,37\text{cm}$ , a to oznacza, że warunek wymiarowania  $3,37 > 2,4$  nie jest spełniony. Dlatego też, gdy dla konstrukcji wystąpią oprócz stanu zgięciowego - siły osiowe ściskające, to należy wykonać rozwiązanie nieliniowe, ponieważ zachowanie się konstrukcji jest nieliniowe (rys.10).

W przypadku analizowanego rusztu, występują tylko obciążenia użytkowe, które powodują wystąpienie tylko stanu zgięciowego. Przyłożone obciążenia osiowe ściskające, mają jedynie posłużyć do oceny wrażliwości rusztu na zjawisko utraty stateczności.

Tab.2. Wyniki nieliniowej analizy stateczności rusztu

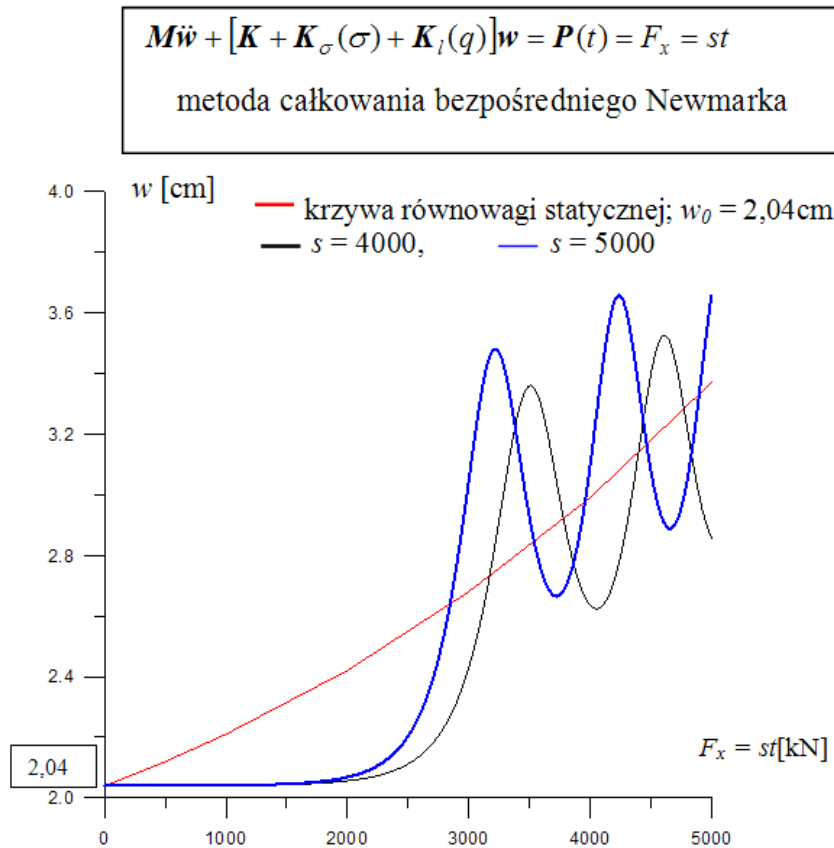
$q_k$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$w$ [cm]	$F_X$ [kN]	$\sigma_{F_x}$ [MPa]	$M_Y$ [kNm]	$M_Z$ [kNm]	$\sigma_{M_y}$ $\sigma_{M_z}$ [MPa]	$\sigma^s$ $\sigma^d$ [MPa]
7,5	2,12	500,0	33,45	281,4	2,08	$\pm 167,7$ $\pm 2,3$	203,5 -136,6
7,5	2,21	1000,0	66,67	283,9	2,39	$\pm 175,1$ $\pm 3,4$	245,2 -119,9
7,5	2,42	2000,0	134,0	322,1	5,39	$\pm 191,9$ $\pm 5,6$	331,6 -63,6
7,5	2,68	3000,0	200,2	355,6	7,88	$\pm 219,9$ $\pm 7,9$	428,0 -27,6
7,5	2,99	4000,0	266,9	396,0	10,06	$\pm 235,9$ $\pm 1,8$	504,7 29,0
7,5	3,37	5000,0	334,4	445,7	13,04	$\pm 265,6$ $\pm 12,9$	612,9 55,8
Rozwiązanie statyczne liniowe							
7,5	2,29	5000,0	335,0	269,9	6,46	$\pm 160,8$ $\pm 11,3$	507,2 162,9

Rys.10. Zależność ugięcia  $w$  od obciążenia  $F_x$  rusztu, przy działaniu obciążenia  $q_k = 7,5 \text{ [kN/m}^2\text{]}$

#### 4. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA RUSZTU

Ocenę wrażliwości rusztu na wymuszenie dynamiczne w postaci sił osiowych  $F_x$  narastających proporcjonalnie do czasu, przedstawia przebieg drgań na Rys.11. Sformułowano równania ruchu za pomocą metody elementów skończonych, to jest do równań równowagi statycznej dołączono konsystentną mas macierz. Równania ruchu rozwiązano metodą całkowania bezpośredniego, a mianowicie metodą Newmarka, szczegółowy algorytm zawarty jest w pracy [4].

Z rozwiązania równań ruchu można zauważyć że, pierwsza faza odpowiedzi to brak ugięć, aż do momentu uzyskania przez siły  $F_x$  wartości zbliżonych do krytycznych problemu utraty stateczności przez bifurkację. Druga faza odpowiedzi, to drgania ze stałą amplitudą wokół krzywej położenia równowagi statycznej otrzymanej z analizy utraty stateczności problemu zgięciowego rusztu – punkt 3.



Rys.11. Przebiegi dynamicznych ugięć  $w$  od obciążenia  $F_x = st$  rusztu



## 5. WNIOSKI

Przeprowadzono analizę statyczną liniową i nieliniową oraz nieliniową weryfikację wrażliwości rusztu na zjawisko stateczności statycznej i dynamicznej.

Porównując wyniki z liniowych i nieliniowych rozwiązań stanu zgięciowego można stwierdzić, że wartości mało się różnią, co świadczy o tym, iż ruszt dla przyłożonego obciążenia zachowuje zbliżony do liniowego charakter pracy. Przyczyną jest duża sztywność rusztu w stosunku do przykładanych obciążeń, a tak duża sztywność wynika ze spełnienia warunków normatywnych wymiarowania konstrukcji. Jednym z tych warunków jest, aby maksymalne ugięcie nie przekroczyło ugięcia granicznego, które wynika ze stanu granicznego użytkowania. Spełnienie tego właśnie warunku narzuca tak dużą sztywność, a tym samym prawie liniowy zakres pracy rusztu.

W procesie projektowania rusztu, warunkiem rozstrzygającym o jego sztywności jest warunek stanu granicznego użytkowania tj. nie przekroczenia przez maksymalne ugięcie wartości ugięcia granicznego. Rozwiązania liniowe i nieliniowe w tym zakresie, są praktycznie jednakowe.

Przy wymiarowaniu przekroju dochodzą jeszcze warunki związane z siłami wewnętrznymi tzw. stan graniczny nośności, który to wymaga spełnienia dodatkowych warunków związanych np. ze statecznością miejscową, lokalną, imperfekcjami geometrycznymi, zwichrzeniem itd. – poszczególnych fragmentów przekroju poprzecznego belki, powodując wzrost sztywności rusztu, a tym samym oddalając możliwość wystąpienia nieliniowej pracy konstrukcji w poprawnych warunkach eksploatacji.

Wykonana ocena wrażliwości rusztu na dodatkowe obciążenia ściskające  $F_x$ , podaje ilościową informację, co do ich maksymalnych wartości, tak aby warunek granicznego ugięcia był również spełniony.

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Bijak-Żochowski M. (pod redakcją): *Mechanika materiałów i konstrukcji*, Warszawa, OWPW 2006.
- [2] Wieczorek M., *Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie*, WAT, Dodatek do biuletynu nr 11(411), Warszawa 1986r.
- [3] Stachura S., *Analiza stateczności kopuły prętowej*, Logistyka nr 6/2010.
- [4] Stachura S., *Stateczność powłoki walcowej pod obciążeniem harmonicznym*, Logistyka nr 6/2010.
- [5] Robobat. Licencja 7891 dla Wyższej Szkoły Ekologii i Zarządzania, Warszawa ul. Wawelska 14.
- [6] PN-EN 1991-1-1 Eurokod 1 „*Oddziaływanie na konstrukcje*” cz.1-1: *Obciążenia użytkowe w budynkach*.