

Roman KRÓL<sup>1</sup>

## WYBRANE PRZYKŁADY OPTIMALIZACJI TOPOLOGII KONSTRUKCJI BELKOWYCH W OPARCIU O METODĘ WZROSTU STRUKTURY WYJŚCIOWEJ

*W artykule przedstawione zostały przykłady optymalizacji topologii konstrukcji belkowych dla różnych wariantów struktury wyjściowej. Uzyskane rezultaty zawierają zależności między położeniem wybranych węzłów a właściwościami konstrukcji określanymi za pomocą średnich naprężeń zredukowanych dla całej konstrukcji lub maksymalnych przemieszczeń liniowych.*

*W optymalizacji topologii były zastosowane odrębnie następujące strategie zmian kształtu konstrukcji: dodanie lub usunięcie węzła oraz dodanie lub usunięcie belkowego elementu skończonego. Po każdej modyfikacji struktury belkowej wykonywana była analiza statyczna w oparciu o metodę elementów skończonych. W każdej strategii wybierany był wariant z konstrukcją o najniższym odchyleniu standardowym naprężeń.*

*Zaprezentowana optymalizacja może być używana na początkowym etapie poprawiania topologii konstrukcji, przed dalszymi rodzajami optymalizacji.*

## EXAMPLES OF TOPOLOGY OPTIMIZATION OF BEAM STRUCTURES BY GROWING GROUND STRUCTURE METHOD

*This article presents topology optimization examples of beam structures for different kinds of initial structures. Presented results have been compared with functions of selected nodes position. The values of these functions depends on construction properties (average von Misses stress for entire structure or maximum translational displacement which is measure of overall construction stiffness).*

*Topology optimization method presented in this article includes four kinds of strategies: addition or removal of beam finite element and addition or removal of construction node with corresponding beam elements. After each modification of structure static analysis based on finite element method is performed. These variants of construction are accepted, which presents most strained structure.*

*Method presented in this article can be used on initial stage of optimization, before further modifications.*

---

<sup>1</sup> Politechnika Radomska im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Mechaniczny,  
ul. Krasickiego 54, 26-600 Radom, e-mail: roman.krol@hotmail.com

## 1. WSTĘP

Optymalizacja topologii jest często jednym z pierwszych etapów poprawiania właściwości bądź poszukiwania kształtu konstrukcji spełniającej pewne wstępne założenia. Klasyczne metody z tej dziedziny polegają na zdefiniowaniu gęstej struktury węzłów połączonych belkowymi lub prętowymi elementami skończonymi, z której następnie pozostawia się po usunięciu najmniej obciążonych elementów, strukturę optymalną dla zadanych warunków brzegowych [1]. Inne metody [1, 2], w tym użyta niniejszym artykule polegają na rozbudowywaniu struktury wyjściowej. Jest to podejście wymagające większego czasu obliczeń, ale pozbawione niedogodności klasycznych metod takich jak np. problem wprowadzania ograniczeń na naprężenia wiążący się ze znikaniem elementów.

W artykule przedstawiono przykłady zastosowania strategii dodawania węzła (wyboru węzła ze struktury węzłów kandydatów na podstawie kryteriów związanych z naprężeniami w konstrukcji). Efektywność zaprezentowanych rozwiązań ilustrują wykresy wielkości związanych z parametrami modyfikowanej struktury belkowej.

Wszystkie przykłady zaprezentowane w tym artykule dotyczą konstrukcji złożonych z belkowych elementów skończonych.

## 2. PRZYKŁADY OPTIMALIZACJI TOPOLOGII KONSTRUKCJI BELKOWYCH

Algorytm optymalizacji topologii konstrukcji użyty do analizy przykładów przedstawionych w tym punkcie bazuje na czterech odrębnych strategiach, które mogą być ze sobą łączone na różne sposoby:

- dodawanie do konstrukcji nowego węzła i połączenie go dwiema nowymi belkami z istniejącymi węzłami;
- usuwanie istniejącego węzła konstrukcji oraz połączonych z nim belek;
- dodawanie nowego belkowego elementu skończonego;
- usuwanie istniejącej belki [2].

Najbardziej efektywne rezultaty jeśli chodzi o kształt konstrukcji można uzyskać budując gęstą strukturę wyjściową a następnie stosując strategię usuwania belek. Strategie dodawania nowego węzła mogą być użyte w celu wprowadzenia do konstrukcji o zadanym już kształcie dodatkowych wzmocnień. Na rys. (2) przedstawiono przykład wzmocnienia płaskiej ramy z rys. (1) uzyskany po zastosowaniu strategii dodawania węzła.

Rezultaty dodania wzmocnień są przedstawione na rys.(2,6) jako zmiana średnich naprężeń dla wszystkich węzłów w funkcji położenia wierzchołka wzmocnienia oraz na rys. (3,7) jako zmiana odchylenia standardowego naprężeń w funkcji położenia wierzchołka wzmocnienia. Na rys. (4,8) przedstawiona jest zmiana maksymalnego przemieszczenia liniowego w funkcji położenia wierzchołka wzmocnienia w celu wyznaczenia sztywności konstrukcji.

Podczas stosowania strategii dodawania węzła określa się wymiary prostopadłościennej (w trójwymiarowych konstrukcjach) lub prostokątnej (w konstrukcjach płaskich) siatki węzłów-kandydatów. Każdy z tych węzłów dołączany jest do konstrukcji dwiema belkami a następnie wykonywana jest analiza statyczna zgodnie z równaniem (1). Jako końcowy rezultat zastosowania tej strategii wybierany jest jeden węzeł spośród węzłów-kandydatów.

Jako kryterium wyboru przyjmowane jest minimalne odchylenie standardowe średnich naprężeń dla wszystkich węzłów konstrukcji. Dla każdego belkowego elementu

skończonego związanego z danym węzłem obliczane są z równania (6) naprężenia zredukowane, a następnie wybierane są naprężenia o największej wartości ze wszystkich skojarzonych z węzłem elementów. Wartość największych naprężeń przypisywana jest do danego węzła. W ten sposób jako miarę równomiernego naprężenia konstrukcji można przyjąć minimalne odchylenie standardowe średnich naprężeń zredukowanych dla wszystkich węzłów konstrukcji obliczane z równania (7).

$$Ku = F \quad (1)$$

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2)$$

$$\sigma_{GX} = 0.5a \frac{M_x}{I_x} \quad (3)$$

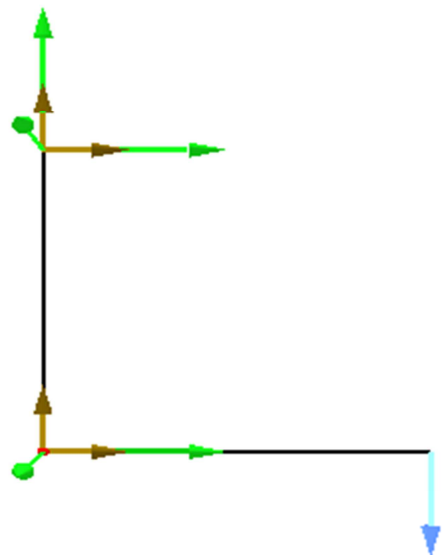
$$\sigma_{GY} = 0.5a \frac{M_y}{I_y} \quad (4)$$

$$\sigma_{SKR} = \frac{M_s}{0.208a^3} \quad (5)$$

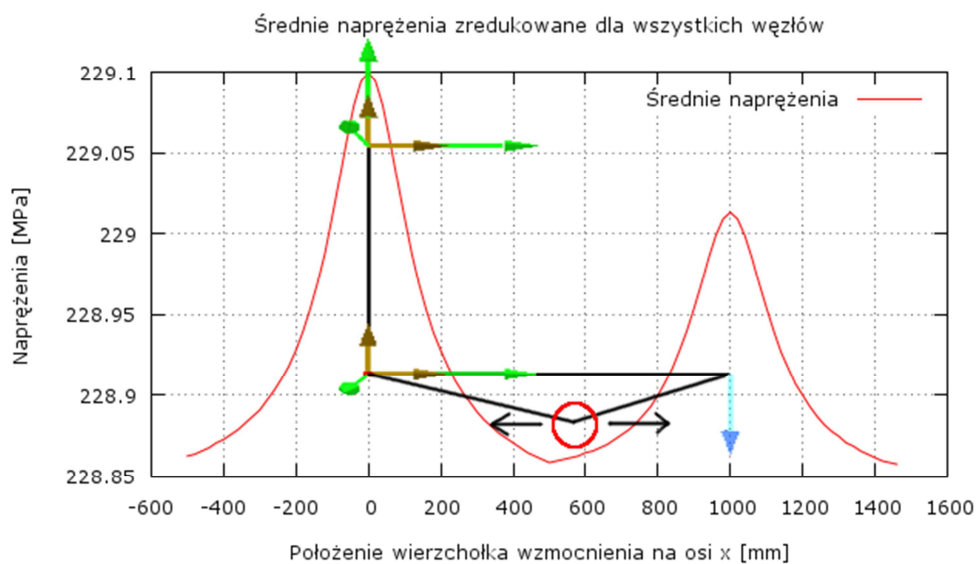
$$\sigma_{ZRED} = \sqrt{0.5 \cdot ((\sigma_{GX} - \sigma_{GY})^2 + (\sigma_{GY} - \sigma)^2 + (\sigma - \sigma_{GX})^2) + 3 \cdot \sigma_{SKR}} \quad (6)$$

$$DX = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{N}} \quad (7)$$

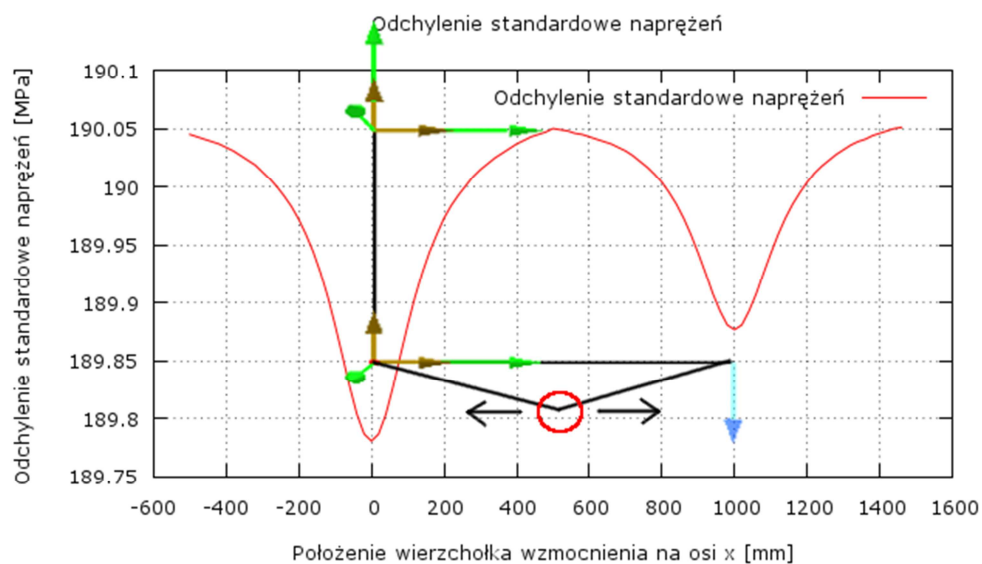
W powyższych równaniach przyjęto następujące oznaczenia:  $\sigma$  – naprężenia od rozciągania-ściskania,  $\sigma_{GX}$ ,  $\sigma_{GY}$  – naprężenia zginające (odpowiednio względem osi x i y),  $\sigma_{SKR}$  – naprężenia od skręcania (w prezentowanych przykładach dla przekroju kwadratowego),  $\sigma_{ZRED}$  – naprężenia zredukowane dla danego elementu,  $E$  – moduł Younga,  $\varepsilon$  – wydłużenie względne elementu belkowego,  $a$  – długość boku kwadratu stanowiącego przekrój elementu,  $I_x$ ,  $I_y$  – geometryczne momenty bezwładności dla danego przekroju elementu (względem osi x i y odpowiednio),  $M_x$ ,  $M_y$  – momenty gnące względem osi x i y odpowiednio,  $M_s$  – moment skręcający,  $DX$  – odchylenie standardowe, gdzie  $\bar{x}$  oznacza wartość średnią (w prezentowanych przykładach średnie naprężenia zredukowane dla wszystkich węzłów) natomiast  $x_1, \dots, x_n$  naprężenia zredukowane przypisane do określonego węzła o indeksie n,  $N$  – liczba węzłów w konstrukcji.



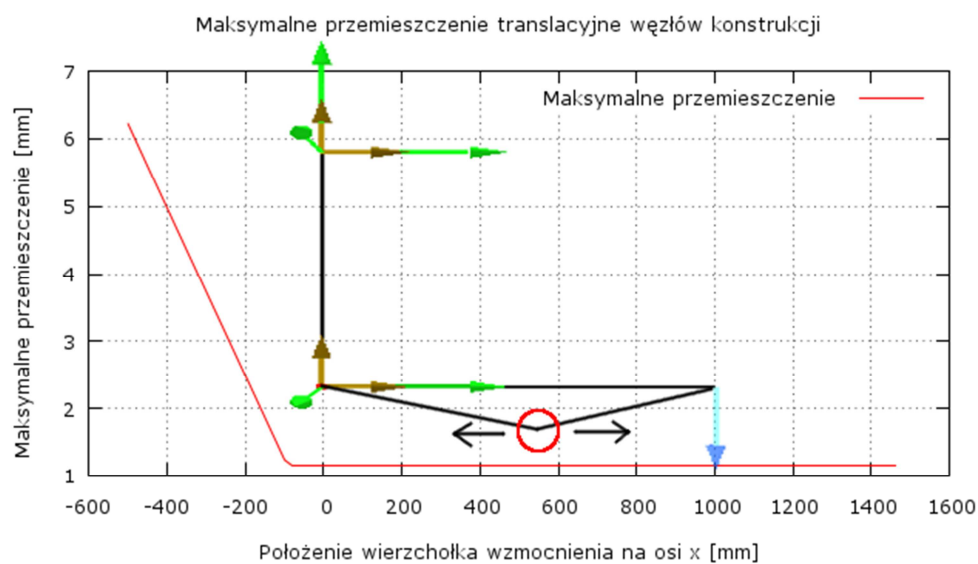
Rys.1. Model płaskiej ramy nr 1. Zielone strzałki oznaczają zablokowane translacyjne stopnie swobody. Brązowe strzałki oznaczają zablokowane rotacyjne stopnie swobody. Niebieska strzałka oznacza wektor siły



Rys.2. Wykres średnich naprężeń zredukowanych dla wszystkich węzłów modelu płaskiej ramy nr 1 ze wzmocnieniem jako funkcja położenia wierzchołka wzmocnienia



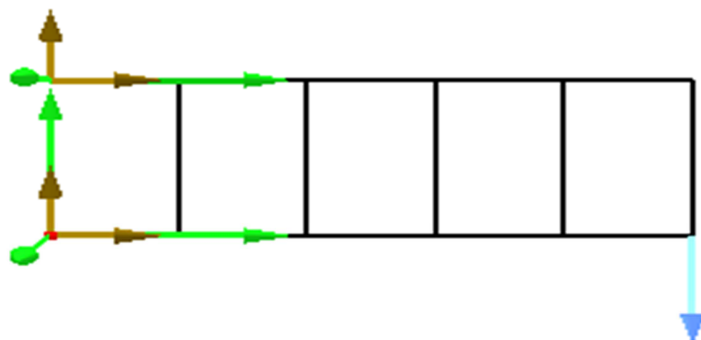
Rys. 3. Wykres odchylenia standardowego naprężeń w modelu płaskiej ramy nr 1 ze wzmocnieniem jako funkcja położenia wierzchołka wzmocnienia



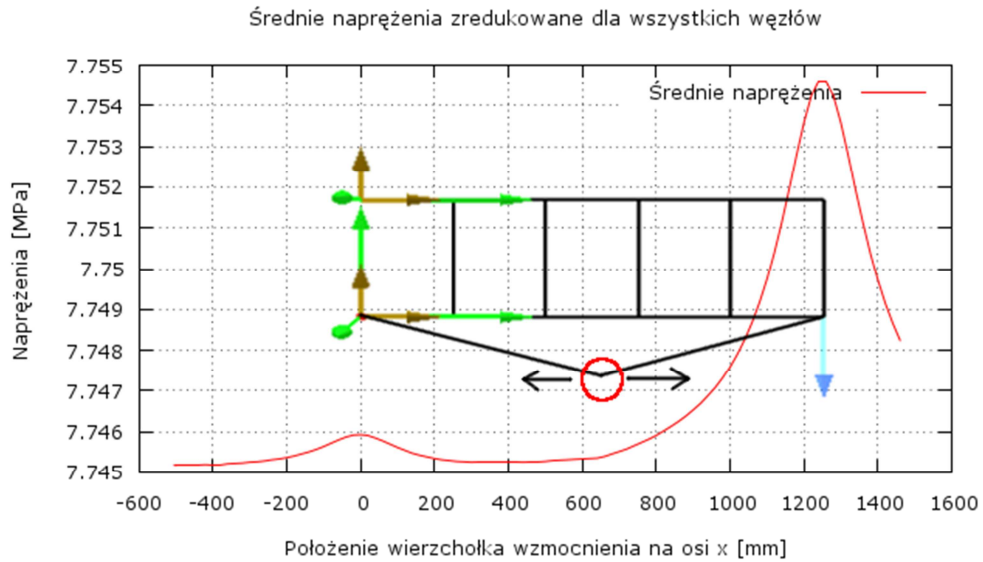
Rys. 4. Wykres maksymalnego przemieszczenia liniowego węzłów w modelu płaskiej ramy nr 1 ze wzmocnieniem jako funkcja położenia wierzchołka wzmocnienia

Według rys. (3) aby uzyskać konstrukcję równomiernie naprężoną należałoby umieścić wierzchołek wzmocnienia w punkcie  $x=0$ . Podobnie jest w przypadku na rys. (2) gdzie kierując się kryterium dodawania takich elementów, które są najbardziej naprężone należałoby umieścić wierzchołek wzmocnienia także w punkcie  $x=0$  aby uzyskać maksymalny wzrost średnich naprężeń zredukowanych dla wszystkich węzłów. Dla danego przykładu porównano także maksymalne przemieszczenia liniowe w konstrukcji ze wzmocnieniem oraz w konstrukcji nie posiadającej wzmocnienia. W ostatnim przypadku wynosiło ono 12.435 mm. Na rys. (4) widać znaczącą poprawę sztywności konstrukcji wzmocnionej. Maksymalne przemieszczenie liniowe jest tu rzędu 1 mm dla położenia wierzchołka wzmocnienia po prawej stronie od punktu  $x=0$ .

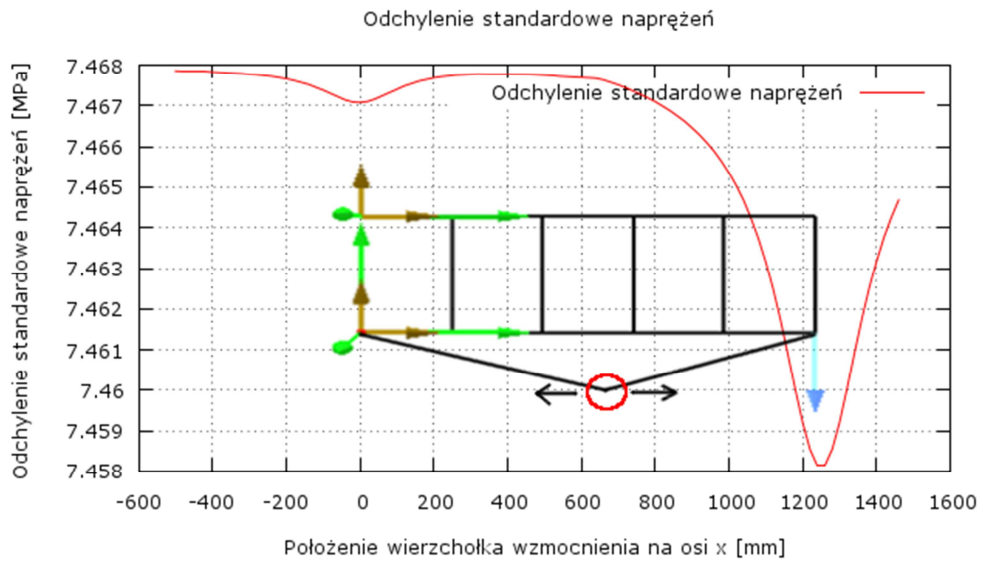
Podobne wykresy sporządzone zostały dla wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej wewnętrznie ramy z rys. (5). W tym przypadku jednak chcąc uzyskać konstrukcję równomiernie naprężoną należałoby dodać wierzchołek wzmocnienia w punkcie  $x=1250$  mm, tzn. na końcu przeciwnym do podpór. Jest to również zgodne z kryterium maksymalnych naprężeń zredukowanych. Aby konstrukcja była maksymalnie naprężona należy dodać wierzchołek wzmocnienia w punkcie  $x=1250$  mm rys. (6). Na rys. (8) także widać poprawę sztywności konstrukcji. W wariantcie bez wzmocnienia maksymalne przemieszczenie liniowe wynosiło 0.44 mm podczas gdy na wykresie z rys.(8) jest ono rzędu 0.01 mm.



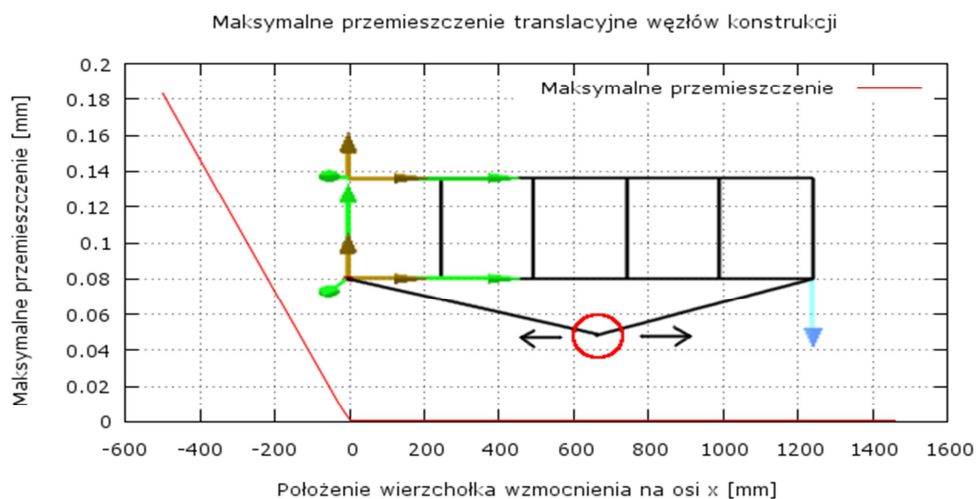
Rys.5. Model płaskiej ramy nr 2. Zielonymi strzałkami oznaczone są zablokowane translacyjne stopnie swobody. Brązowe strzałki oznaczają zablokowane rotacyjne stopnie swobody. Niebieska strzałka oznacza wektor siły



Rys.6. Średnie naprężenia zredukowane dla wszystkich węzłów płaskiej ramy nr 2 ze wzmocnieniem w funkcji położenia wierzchołka wzmocnienia

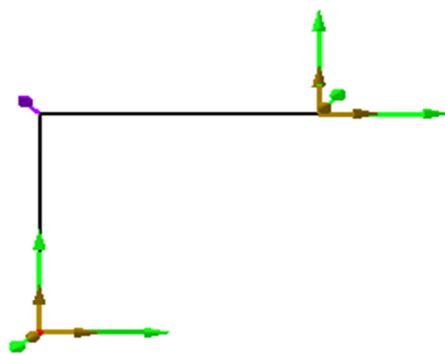


Rys.7. Odchylenie standardowe naprężeń w płaskiej ramie nr 2 ze wzmocnieniem jako funkcja położenia wierzchołka wzmocnienia



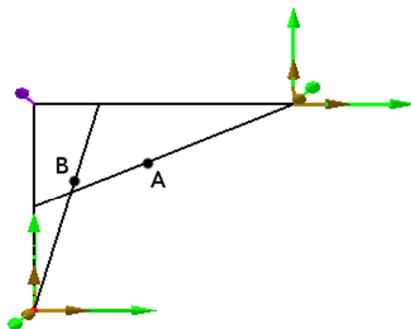
Rys.8. Rama. Wykres maksymalnego przemieszczenia liniowego modelu płaskiej ramy nr 2 ze wzmocnieniem w funkcji położenia wierzchołka wzmocnienia

Na rys. (9,10,11,12) przedstawiono wyniki optymalizacji ram płaskich nr 3 i nr 4 obciążonych momentem. Rys. (10,12) przedstawiają rezultaty dwukrotnego zastosowania strategii dodawania węzła dla konstrukcji z rys. (9,11) odpowiednio. W tab. (1) przedstawione zostały średnie naprężenia zredukowane dla wszystkich węzłów oraz odchylenie standardowe naprężeń po zastosowaniu każdej ze strategii dodawania węzła. Widoczny jest spadek odchylenia standardowego naprężeń po dodaniu każdego kolejnego węzła co świadczy o tym, że konstrukcja staje się równomiernie naprężona.

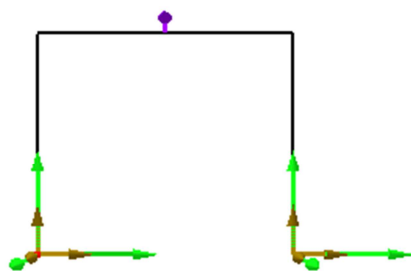


Rys.9. Model płaskiej ramy nr 3. Fioletową strzałką oznaczono wektor momentu. Zielone i brązowe strzałki oznaczają odpowiednio zablokowane translacyjne i rotacyjne stopnie swobody

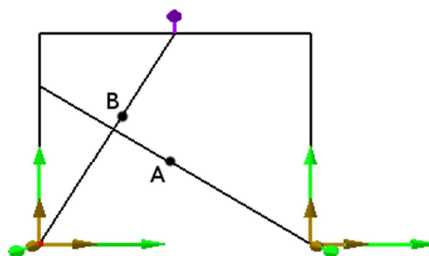




Rys.10. Wynik optymalizacji ramy z rys. 9. Dodane zostały 2 węzły (belki połączone są pod kątem  $180^\circ$  w węzłach A i B)



Rys.11. Model płaskiej ramy nr 4. Niebieską strzałką oznaczona jest siła, zielone strzałki oraz brązowe oznaczają odpowiednio zablokowane translacyjne i rotacyjne stopnie swobody



Rys.12. Wynik optymalizacji ramy z rys. 11. Dodane zostały 2 węzły (belki połączone są ze sobą pod kątem  $180^\circ$  w węzłach A i B)

Tab.1. Wyniki optymalizacji konstrukcji z rys. (9,10,11,12)

Nr rysunku	odchylenie standardowe naprężeń [MPa]	średnie naprężenia zredukowane dla wszystkich węzłów [MPa]
10 (po dodaniu pierwszego węzła)	0.455917	0.66776
10 (po dodaniu drugiego węzła)	0.388809	0.724881
12 (po dodaniu pierwszego węzła)	0.277836	0.442137
12 (po dodaniu drugiego węzła)	0.252484	0.458807

### 3. PODSUMOWANIE

Na podstawie przytoczonych wykresów rys. (4), rys. (8) dodanie wzmocnienia powoduje wyraźny wzrost sztywności konstrukcji. Rozwiązaniem bardziej optymalnym z punktu widzenia optymalizacji topologii konstrukcji byłoby dodanie belki po przekątnej ramy wielokrotnie statycznie niewyznaczalnej wewnątrz rys. (5). Wybrana postać wzmocnienia obydwu płaskich ram została wybrana z uwagi na prostotę przedstawienia problemu optymalizacji. Wartości minimalne na wykresach rys. (3), rys. (7) ilustrują miejsca, w których optymalne jest umieszczenie wierzchołka wzmocnienia. Po zastosowaniu każdej kolejnej strategii konstrukcja powinna być bardziej równomiernie wyęźżona. Można także zaobserwować wzrost średnich naprężeń zredukowanych dla wszystkich węzłów. Zgodnie z wartościami z tab. (1) kolejne dodawanie węzłów powoduje spadek odchylenia standardowego naprężeń oraz wzrost średnich naprężeń zredukowanych co świadczy o dodawaniu elementów najbardziej naprężonych. Przedstawione metody są kosztowne pod względem czasu obliczeń i mogą być zastosowane jedynie do wstępnej modyfikacji konstrukcji w postaci dodania oraz usunięcia kilku węzłów lub belkowych elementów skończonych.

### 4. BIBLIOGRAFIA

- [1] Rozvany G. I. N. *A critical review of established methods of structural topology optimization* (2009) 37:217-237
- [2] Hagishita T.; Ohsaki M. *Topology optimization of trusses by growing ground structure method*, *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2009) 37:377-393
- [3] Ohsaki M.; Katoh N. *Topology optimization of trusses with stress and local constraints on nodal stability and member intersection* *Structural and Multidisciplinary Optimization* (2005) 29:190-197