

KIERZKOWSKI Artur¹

MARKOWSKI MODEL EKSPLOATACJI STATKÓW POWIETRZNYCH

W referacie przedstawiono Markowski model eksploatacji statków powietrznych. Wskazano możliwe sposoby rozwiązań zagadnienia dla zaproponowanego modelu eksploatacji statków powietrznych. Wskazano możliwe metody wyznaczania podstawowych charakterystyk związanych z eksploatacją i niezawodnością statków powietrznych z wykorzystaniem metody Markowskiej oraz Semi-Markowskiej.

MODEL FOR GROUND HANDLING TIME OF AIRCRAFT

The paper presents Markov model of aircraft operations. Indicates possible ways of solving problem for the proposed model aircraft operations. Indicates possible methods of determining the basic characteristics associated with the operation and reliability of aircraft using the Semi-Markov and Markov method.

1. WSTĘP

W procesie eksploatacji statków powietrznych wyróżnić można dwa stany: obsługiwanie oraz użytkowania. Przeglądy techniczne muszą być wykonywane z zadaną częstotliwością oraz w wyznaczonych portach lotniczych. Zagadnienie jednoczesnego modelowania siatki połączeń z uwzględnieniem relacji czasowych w procesie obsługiwanie jest niezwykle skomplikowane. Z punktu widzenia linii lotniczej, konieczne jest znalezienie rozwiązania optymalnego dla zamodelowania siatki połączeń przy maksymalizacji liczby pasażerów, oraz przy maksymalnym wykorzystaniu interwałów pomiędzy przeglądami (minimalizacja liczby obsługa). Co istotne, zagadnienie to mocno się komplikuje podczas powstania zakłóceń w ruchu lotniczym.

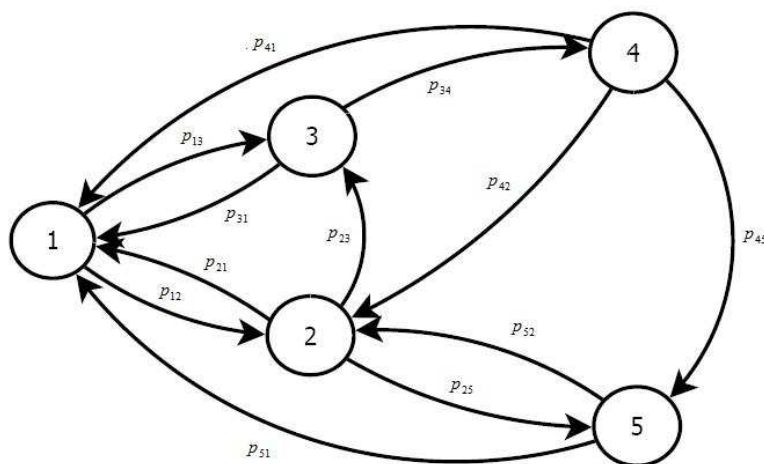
Kwestia, o której mowa w poprzednim paragrafie, rozpatrywana była już w latach 70 XX wieku, kiedy to A. Levin sprecyzował zagadnienie problemu odpowiedniego modelowania połączeń lotniczych oraz rotacji statków powietrznych. Zagadnienie zostało opisane w [1]. Podobną problematyką w latach 90 XX wieku zajmował się G. Desaulniers, który zaprezentował dość ciekawy model dziennego harmonogramowania procesu eksploatacji statków powietrznych [2]. Model optymalizacji procesu eksploatacji uwzględniający konieczność wykonywania przeglądów technicznych zaprezentowany został przez Sriram C. oraz Haghani A. w [3].

¹Politechnika Wroclawska, Wydział Mechaniczny, Instytut Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn
Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, artur.kierzkowski@pwr.wroc.pl

2. MARKOWSKI MODEL EKSPLOATACJI STATKÓW POWIETRZNYCH – METODA MARKOWSKA

Zaprezentowany model matematyczny opisuje proces eksploatacji dowolnego statku powietrznego.

Rysunek 1 przedstawia możliwe relacje pomiędzy stanami eksploatacji samolotu.



Rys. 1. Graf procesu eksploatacji statku powietrznego. 1- Stan oczekiwania na wykonywanie zadań transportowych, 2 – stan obsługi przed lotem, 3 – stan lotu, 4 – stan obsługi po locie, 5 – stan obsługi technicznej.

Macierz prawdopodobieństw przejść dla grafu będzie wyglądała następująco:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & p_{25} \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

Z macierzy (1) wynika że:

$$\begin{aligned} p_{12} + p_{13} &= 1, \\ p_{21} + p_{23} + p_{25} &= 1, \\ p_{31} + p_{34} &= 1, \\ p_{41} + p_{42} + p_{45} &= 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$p_{51} + p_{52} = 1.$$

Proces eksploatacji statku powietrznego rozpatrujemy jako dyskretny w stanach i czasie. Układ równań rozkładu stacjonarnego włożonego łańcucha Markowa przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p_{21} \cdot \pi_2 + p_{31} \cdot \pi_3 + p_{41} \cdot \pi_4 + p_{51} \cdot \pi_5, \\ \pi_2 &= p_{12} \cdot \pi_1 + p_{42} \cdot \pi_4 + p_{52} \cdot \pi_5, \\ \pi_3 &= p_{13} \cdot \pi_1 + p_{23} \cdot \pi_2, \\ \pi_4 &= p_{34} \cdot \pi_3, \\ \pi_5 &= p_{25} \cdot \pi_2 + p_{45} \cdot \pi_4.\end{aligned}\tag{3}$$

Oraz równanie normujące:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1\tag{4}$$

Równanie (3) i (4) można zapisać macierzowo w sposób następujący:

$$\begin{bmatrix} -1 & p_{21} & p_{31} & p_{41} & p_{51} \\ p_{12} & -1 & 0 & p_{42} & p_{52} \\ p_{13} & p_{23} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{34} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\tag{5}$$

Po dokonaniu przekształceń rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa przyjmuje postać:

$$\pi_2 = \frac{p_{51}}{(1-p_{42}p_{34}p_{23}-p_{52}+p_{52}p_{23}+p_{53}p_{34}p_{23})(-p_{31}p_{13}-p_{41}p_{34}p_{13}+p_{51}+p_{51}p_{13}+p_{51}p_{34}p_{13})} - \frac{p_{51}}{(p_{12}+p_{43}p_{34}p_{13}-p_{52}p_{13}-p_{53}p_{34}p_{13})(p_{21}+p_{31}p_{23}+p_{41}p_{34}p_{23}-p_{51}-p_{51}p_{23}-p_{51}p_{34}p_{23})}\tag{6}$$

$$\pi_1 = \frac{1-p_{42}p_{34}p_{23}-p_{52}+p_{52}p_{23}+p_{53}p_{34}p_{23}}{p_{12}+p_{43}p_{34}p_{13}-p_{52}-p_{52}p_{13}-p_{53}p_{34}p_{13}} \pi_2 - \frac{p_{52}}{p_{12}+p_{43}p_{34}p_{13}-p_{52}-p_{52}p_{13}-p_{53}p_{34}p_{13}}\tag{7}$$

$$\pi_3 = p_{13}\pi_1 + p_{23}\pi_2,\tag{8}$$

$$\pi_4 = p_{34}\pi_3, \quad (9)$$

$$\pi_5 = 1 - \pi_1 - \pi_2 - \pi_3 - \pi_4. \quad (10)$$

Rozkład prawdopodobieństw procesu można obliczyć w oparciu o rozkład włożonego łańcucha Markowa i wartości oczekiwane trwania stanów procesu. Wartości oczekiwane można obliczyć z następujących wzorów:

$$E(T_1) = \int_0^{\infty} td[F_{12}(t) + F_{13}(t)], \quad (11)$$

$$E(T_2) = \int_0^{\infty} td[F_{21}(t) + F_{23}(t) + F_{25}(t)], \quad (12)$$

$$E(T_3) = \int_0^{\infty} td[F_{31}(t) + F_{34}(t)], \quad (13)$$

$$E(T_4) = \int_0^{\infty} td[F_{41}(t) + F_{42}(t) + F_{45}(t)], \quad (14)$$

$$E(T_5) = \int_0^{\infty} td[F_{51}(t) + F_{52}(t)]. \quad (15)$$

Powyższe obliczenia prowadzą do wyznaczenia prawdopodobieństwa granicznego. Wyrazić można je wzorem:

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = P_j = \frac{\pi_j E(T_j)}{\sum_{i \in S} \pi_i E(T_i)} \quad (16)$$

Wartość prawdopodobieństw granicznych dla poszczególnych stanów mają więc postać:

$$P_1 = \frac{\pi_1 E(T_1)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)}, \quad (17)$$

$$P_2 = \frac{\pi_2 E(T_2)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)}, \quad (18)$$

$$P_3 = \frac{\pi_3 E(T_3)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)} \quad (19)$$

$$P_4 = \frac{\pi_4 E(T_4)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)} \quad (20)$$

$$P_5 = \frac{\pi_5 E(T_5)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)} \quad (21)$$

Graniczny współczynnik gotowości można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} K_d &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \\ &= \frac{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4)}{\pi_1 E(T_1) + \pi_2 E(T_2) + \pi_3 E(T_3) + \pi_4 E(T_4) + \pi_5 E(T_5)}. \end{aligned} \quad (22)$$

3. MARKOWSKI MODEL EKSPLOATACJI STATKÓW POWIETRZNYCH – METODA SEMI - MARKOWSKA

Rozpatrywana faza działania systemu może być opisana procesem semimarkowskim $\{X(t) : t \geq 0\}$ o skończonym zbiorze stanów $S_p = \{1,2,3,4,5\}$. W tym przypadku jądro procesu zostanie określony przez macierz:

$$Q_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{p12} & Q_{p13} & 0 & 0 \\ Q_{p21} & 0 & Q_{p23} & 0 & Q_{p25} \\ Q_{p31} & 0 & 0 & Q_{p34} & 0 \\ Q_{p41} & Q_{p42} & 0 & 0 & Q_{p45} \\ Q_{p51} & Q_{p52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t),$$

$$P_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij},$$

$$\frac{Q_{ij}(t)}{p_{ij}} = F_{ij}(t).$$

Przejścia ze stanu 1 do stanów 2, 3 można zapisać w następujący sposób:

$$Q_{p12}(t) = p_{12}F_{\zeta_{p1}}(t),$$

$$Q_{p13}(t) = p_{13}F_{\zeta_{p1}}(t).$$

Przejścia ze stanu 2 do stanów 1, 3, 5:

$$Q_{p21}(t) = p_{21}F_{\zeta_{p2}}(t),$$

$$Q_{p23}(t) = p_{23}F_{\zeta_{p2}}(t),$$

$$Q_{p25}(t) = p_{25}F_{\zeta_{p2}}(t).$$

Przejścia ze stanu 3 do stanów 1, 4:

$$Q_{p31}(t) = p_{31}F_{\zeta_{p3}}(t),$$

$$Q_{p34}(t) = p_{34}F_{\zeta_{p3}}(t).$$

Przejście ze stanu 4 do 1, 2, 5:

$$Q_{p41}(t) = p_{41}F_{\zeta_{p4}}(t),$$

$$Q_{p42}(t) = p_{42}F_{\zeta_{p4}}(t),$$

$$Q_{p45}(t) = p_{45}F_{\zeta_{p4}}(t).$$

Przejście ze stanu 5 do 1, 2:

$$Q_{p51}(t) = p_{51}F_{\zeta_{p5}}(t),$$

$$Q_{p52}(t) = p_{52}F_{\zeta_{p5}}(t).$$

Niech wektor $\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4, p_5]$ będzie rozkładem początkowym procesu, którego wartość wynosi $\mathbf{p} = [1, 0, 0, 0, 0]$.

Macierz prawdopodobieństw przejść można zapisać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & p_{25} \\ p_{31} & 0 & 0 & p_{34} & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Do najważniejszych charakterystyk procesu semimarkowskiego należą prawdopodobieństwa przejścia zdefiniowane jako prawdopodobieństwa warunkowe

$$P_{ij}(t) = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \quad i, j \in S \quad (25)$$

Prawdopodobieństwa te spełniają równania Fellera.

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij} [I - G_i(t)] + \sum_{k \in S} \int_0^t P_{kj}(t-x) dQ_{ik}(x), \quad i, j \in S \quad (26)$$

Rozwiązanie tego układu można znaleźć posługując się przekształceniem Laplace'a-Stieltjesa. Układ ten poddany transformacji Laplace'a - Stieltjesa przyjmuje postać

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \delta_{ij} [I - \tilde{g}_i(s)] + \sum_{k \in S} \tilde{q}_{ik}(s) \tilde{p}_{kj}(s), \quad i, j \in S, \quad (27)$$

W notacji macierzowej układ ten przyjmuje postać

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) = [I - \tilde{\mathbf{g}}(s)] + \tilde{\mathbf{q}}(s) \tilde{\mathbf{p}}(s). \quad (28)$$

Stąd

$$\tilde{\mathbf{p}}(s) = [I - \tilde{\mathbf{q}}(s)]^{-1} [I - \tilde{\mathbf{g}}(s)] \quad (29)$$

Wyznaczenie prawdopodobieństw przejść między stanami wymaga wyznaczenia transformat odwrotnych powstałego układu równań.

4. WNIOSKI

W referacie zostały zaprezentowane możliwe metody rozwiązywania modeli Markowa. Zastosowanie metody Semi-Markowskiej pozwala na zastosowanie innych rozkładów czasu przebywania w stanach niż wykładniczy. W przypadku posiadania małej próby problem może powstawać przy aproksymacjach rozkładów.

Zastosowanie modeli umożliwia wyznaczenie podstawowych charakterystyk niezawodnościowych (tj. współczynnik gotowości), jak również pozwala na wyznaczenie prawdopodobieństw poszczególnych stanów. Prawdopodobieństwa stanów mogą być porównane z ogólnymi tendencjami europejskiej przestrzeni powietrznej. Dzięki temu możliwe staje się wyznaczenie korelacji pomiędzy stanami rzeczywistymi a tymi, które wskazują dane europejskie.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



DOLNY
ŚLĄSK

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Do powstania artykułu przyczynił się udział w Projekcie „Przedsiębiorczy doktorant- inwestycja w innowacyjny rozwój regionu”. Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego funduszu społecznego.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Levin A., 1971. Scheduling and fleet routing models for transportation system. *Transportation Science* 5, 232-255.
- [2] Desaulniers. G., 1997. Daily aircraft routing and scheduling. *Management Science* 43, 841-855.
- [3] Sriram C., Haghani A., 2003. An optimization model for aircraft maintenance scheduling and re-assignment. *Transportation Research Part A* 37, 29-48.
- [4] Lewitowicz J.: Podstawy eksploatacji statków powietrznych. Tom 1-5. Wyd. ITWL, Warszawa 2001-2009.