

Marcin GAJEWSKI¹
Stanisław JEMIOŁO²

O ZASTOSOWANIU ELEMENTÓW KOHEZYJNYCH W ANALIZIE ELEMENTÓW KONSTRUKCJI MUROWYCH

W artykule prezentowane są rozwiązania wybranych zadań brzegowych dotyczących konstrukcji murowych przy uwzględnieniu sprężysto-kruchych właściwości interfejsu jaki stanowi zaprawa w murze. Materiał cegły jest modelowany jako sprężysty. Rozwiązano zadania na komórkach elementarnych muru oraz zagadnienie brzegowe zginania części muru. Do rozwiązania wszystkich zagadnień stosowany jest program ABAQUS ze sformulowaniem interfejsu przez elementy kohezyjne. Zakłada się warunki stanu granicznego jako kwadratowe funkcje składowych wektora naprężenia albo wektora odkształcenia w interfejsie. Po przekroczeniu stanu granicznego przyjęto możliwość degradacji właściwości sprężystych interfejsu w sformułowaniu przemieszczeniowym uwzględniając liniowe równanie ewolucji.

AN APPLICATION OF COHESIVE ELEMENTS IN MASONRY ANALYSIS

In the paper solutions of some boundary-value problems for masonry are presented taking into account special elastic-brittle properties of mortar. Material for brick modeling is assumed to be elastic. Some example tasks are solved for an elementary cell and for bended masonry beam. Solution of all tasks are obtained using ABAQUS software with material interface formulated via cohesive elements. The limit functions are postulated in quadratic form depending on stress or strain vector components. In post-critical state the degradation of mortar elastic properties is taken into account in displacement formulation with linear evolution function.

1. WSTĘP

Przedstawione w referacie symulacje numeryczne są prezentowane w ramach programu badawczego dotyczącego MES i modelowania konstytutywnego w analizie zniszczenia konstrukcji murowych prowadzonego przez autorów. Jej celem jest rozpoznanie

¹Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, 00-637 Warszawa, al.Armi Ludowej 16, tel: + 48 22 234-51-34, e-mail: m.gajewski@il.pw.edu.pl

²Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Łądowej, 00-637 Warszawa, al.Armi Ludowej 16, tel: + 48 22 234-51-34, e-mail: s.jemiolo@il.pw.edu.pl

możliwości adaptacji na potrzeby programu badawczego zaawansowanych modeli teoretycznych zaprogramowanych w systemie ABAQUS [1-3]. Chodzi tu głównie o zadanie budowy modeli makroskopowych na podstawie technik tzw. homogenizacji numerycznej, która nabiera ostatnio szczególnego znaczenia w analizie konstrukcji murowych, por. np. [4]. Rozwiązania zadań na komórkach elementarnych w zamierzeniu mają stanowić bazę do wyznaczenia parametrów materiałowych nieliniowych, anizotropowych relacji konstytutywnych modeli kontynualnych. Elementy murowe są obecnie modelowane jako niejednorodne materiały ortotropowe, por. np. [4] i literaturę tam cytowaną.

2. MODELE KONSTITUTYWNE MATERIAŁÓW

Materiał cegły jest modelowany jako izotropowy i sprężysty. Relacja konstytutywna ma wtedy następującą postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-2\nu)\boldsymbol{\varepsilon} + \nu(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \right], \quad (1)$$

gdzie E jest modułem Younga, a ν stałą Poissona, zaś $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ są tensorami drugiego rzędu odpowiednio naprężenia i odkształcenia. Tensor \mathbf{I} jest tensorem jednostkowym.

Materiał zaprawy w tej pracy jest modelowany jako sprężysto-kruchy, por. [1-3]. Do momentu osiągnięcia stanu krytycznego interfejs modelowany jest tzw. elementami kohezyjnymi i ma anizotropowe własności sprężyste opisane następującą relacją:

$$\mathbf{t} = \mathbf{K}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{t} jest wektorem naprężenia w interfejsie ($\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$), \mathbf{K} natomiast jest tensorem drugiego rzędu charakteryzującym sztywność interfejsu, zaś $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ jest wektorem odkształceń w interfejsie określanym jako

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_n \mathbf{e}_n + \varepsilon_s \mathbf{e}_s + \varepsilon_t \mathbf{e}_t = \frac{\delta_n}{l_0} \mathbf{e}_n + \frac{\delta_s}{l_0} \mathbf{e}_s + \frac{\delta_t}{l_0} \mathbf{e}_t. \quad (3)$$

W relacji (3), zbiór wektorów $\{\mathbf{e}_i\}$, gdzie $i = n, s, t$ stanowi ortonormalną bazę wektorową w interfejsie. Przez n oznaczono kierunek normalny, a s i t oznaczają dwa prostopadłe do siebie kierunki styczne. Dodatkowo δ_i są przemieszczeniami w interfejsie, a l_0 stanowi grubość elementu (warstwy) kohezyjnej. W ogólności reprezentacja tensora \mathbf{K} w przyjętej bazie może mieć następującą postać:

$$\mathbf{K} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{ns} & K_{nt} \\ K_{ns} & K_{ss} & K_{st} \\ K_{nt} & K_{st} & K_{tt} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

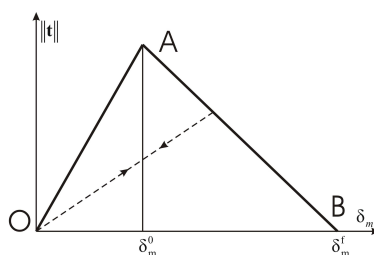
Kryterium uszkodzenia przyjmuje się w postaci funkcji kwadratowej, w której występują trzy składowe wektora naprężenia,

$$\left(\frac{\langle t_n \rangle}{t_n^{\max}}\right)^2 + \left(\frac{t_s}{t_s^{\max}}\right)^2 + \left(\frac{t_t}{t_t^{\max}}\right)^2 = 1, \quad (5)$$

albo trzy składowe wektora odkształcenia w interfejsie:

$$\left(\frac{\langle \varepsilon_n \rangle}{\varepsilon_n^{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_s^{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_t^{\max}}\right)^2 = 1. \quad (6)$$

W warunku (5), wielkości t_i^{\max} oznaczają maksymalne wartości składowych wektora naprężenia wyznaczone odpowiednio w teście rozciągania w kierunku n i ścinania w kierunku s i t . W relacji (6) występują z kolei maksymalne wartości składowej wektora odkształcenia w interfejsie ε_i^{\max} wyznaczone w analogicznych testach doświadczalnych.



Rys.1. Degradacja właściwości sprężystych interfejsu po wystąpieniu uszkodzenia

Po zainicjowaniu uszkodzenia zakłada się degradację własności sprężystych interfejsu określaną przez skalarny parametr D , zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{t} = (1-D)\bar{\mathbf{t}}, \quad (7)$$

gdzie $\bar{\mathbf{t}}$ oznacza wektor naprężenia wyliczony z relacji (2) tak, jakby nie nastąpiło uszkodzenie. Parametr D zmienia się zgodnie z przyjętym w niniejszej pracy liniowym modelem ewolucji w postaci:

$$D = \frac{\delta_m^f (\delta_m^{\max} - \delta_m^0)}{\delta_m^{\max} (\delta_m^f - \delta_m^0)}, \quad (8)$$

a interpretacja występujących w (8) parametrów jest przedstawiona na rys. 1. Wszystkie występujące w (8) przemieszczenia mają interpretację tzw. przemieszczeń efektywnych wyznaczonych zgodnie ze wzorem:

$$\delta_m = \sqrt{\langle \delta_n \rangle^2 + \delta_s^2 + \delta_t^2} \quad (9)$$

W równaniu ewolucji (8) δ_m^{\max} oznacza maksymalną wartość efektywnego przemieszczenia w interfejsie osiągniętą w całej historii procesu degradacji materiału.

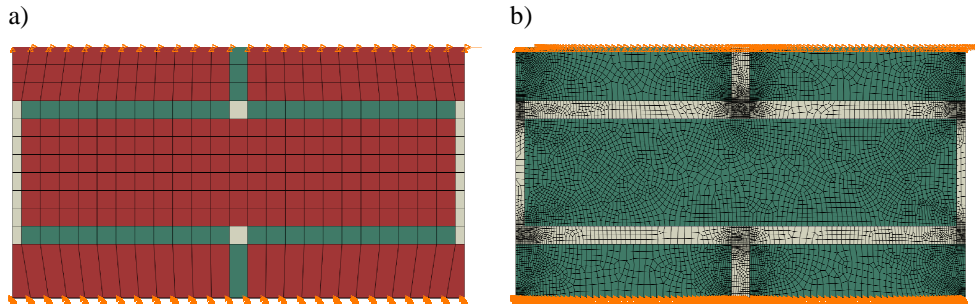
3. SYMULACJE NUMERYCZNE

3.1 Zadania na komórkach elementarnych

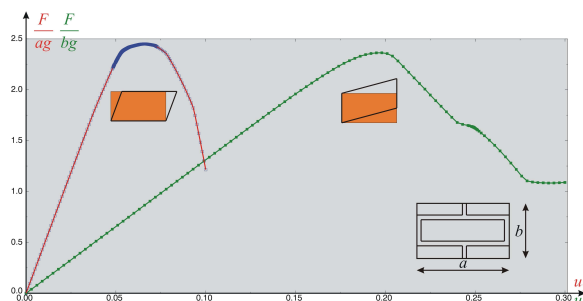
Zgodnie z wynikami teorii homogenizacji, [5], w przypadku danego układu murowego do analizy można wybrać tzw. komórkę elementarną, por. rys.2 i rys.5. Komórki elementarne muru są modelowane jako elementy płaskie (PSN). Założono wymiar standardowej cegły jako: 25x12x6.5 [cm] (w płaszczyźnie modelu 25x6.5[cm]) oraz grubość spoiny równą 1.0[cm]. Obszar cegieł jest modelowany elementami CPS4R, a obszar zaprawy elementami CPS4R i elementami kohezyjnymi COH2D4.

W przypadku cegły w relacji konstytutywnej (1) przyjęto $E=20$ [GPa] i $\nu=0.15$. Spoina jest modelowana zgodnie z opisem zamieszczonym w pkt.2 i w relacji (2) składowe reprezentacji tensora sztywności \mathbf{K} przyjęto jako: $K_{mm}=2$ [GPa], $K_{ss}=1.6$ [GPa] i $K_{nn}=1.6$ [GPa]. Pozostałe składowe \mathbf{K} są zerowe. Oznacza to, że materiał interfejsu jest materiałem ortotropowym.

Warunek graniczny przyjęto w formie relacji (6) podstawiając odpowiednio: $\varepsilon_n^{\max}=0.001$, $\varepsilon_s^{\max}=0.002$ i $\varepsilon_t^{\max}=0.002$. Degradację uwzględniono zgodnie z modelem (8) podstawiając $\delta_m^f=0.1$ [mm]. Wartość parametru δ_m^0 wynika z relacji (9), grubości spoiny (10[mm]) oraz danych do warunku granicznego ε_i^{\max} .



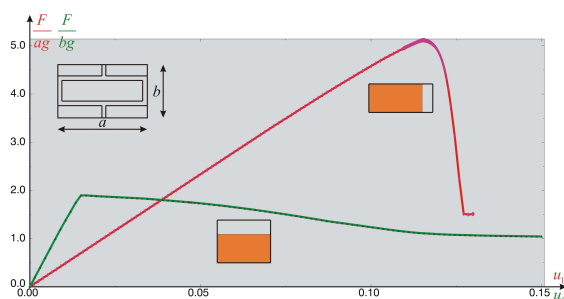
Rys.2. Siatka MES: a) regularna, b) po zastosowaniu algorytmu adaptacyjnego z widocznym podziałem na podobszary modelujące cegły i zaprawę w przypadku komórki elementarnej



Rys.3. Uśredniona siła w funkcji przemieszczenia krawędzi w testach ścinania przeprowadzonych na komórce elementarnej

Rozwiązano na komórkach elementarnych cztery zadania brzegowe: dwa zadania ścinania i dwa zadania rozciągania w różnych kierunkach. We wszystkich zadaniach deformację wymuszano zakładając odpowiednie przemieszczeniowe warunki brzegowe. Schematycznie deformacje te zamieszczono na rys.3 i 4, obok wykresów uśrednionych sił w funkcji odpowiedniego przemieszczenia.

Porównując wykresy zamieszczone na rys. 3 i 4 widać wyraźną anizotropię tzw. efektywnych właściwości mechanicznych komórki elementarnej. O ile w przypadku ścinania różnica między maksymalnymi wartościami sił wynosi zaledwie kilka procent, to w przypadku rozciągania jest bliska 150%. Dodatkowo zauważamy, znaczne różnice w wartościach sztywności elementu murowego w zależności od kierunku rozciągania oraz sposobu realizacji ścinania, co jest charakterystyczne dla materiałów ortotropowych.



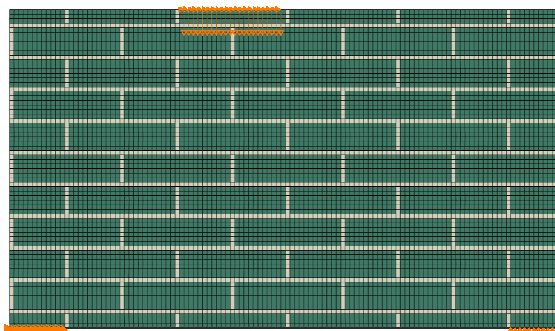
Rys.4. Uśredniona siła w funkcji przemieszczenia krawędzi w testach rozciągania przeprowadzonych na komórce elementarnej

3.2 Przykład zadania brzegowego

Przeprowadzono symulację zginania elementu murowego o długości pięciu standardowych cegieł powiązanych warstwą zaprawy o grubości 1[cm] (tj. 5x25[cm]+5x1[cm]) i wysokości dziesięciu warstw cegieł ułożonych na płask, również połączonych warstwą zaprawy o grubości 1[cm] (tj. 10x6.5[cm]+10x1[cm]). Sposób

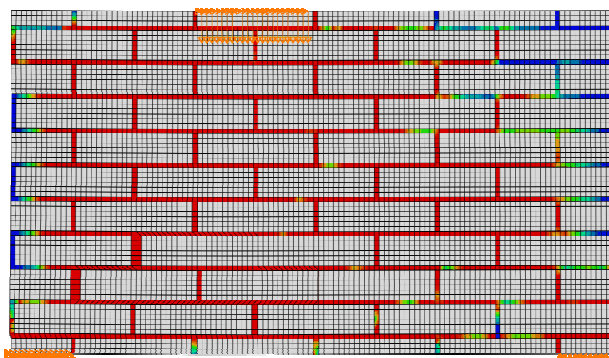
ułożenia cegieł w murze, siatkę MES oraz przyjęte przemieszczeniowe warunki brzegowe zaprezentowano na rys.5.

W tym przypadku dane materiałowe przyjęto tak jak dla komórek elementarnych, z tą tylko różnicą, że zadanie rozwiązano raz z kryterium granicznym w postaci (6), zaś drugi raz z kryterium w postaci (5) podstawiając odpowiednio: $t_n^{\max} = 0.5[\text{MPa}]$, $t_s^{\max} = 1.0[\text{MPa}]$ i $t_t^{\max} = 1.0[\text{MPa}]$.

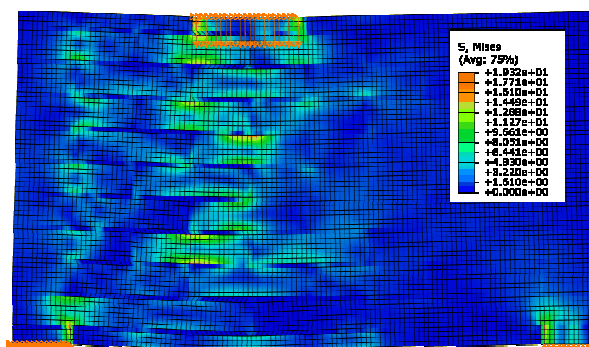


Rys.5. Siatka MES z widocznym podziałem na podobszary modelujące cegły i zaprawę

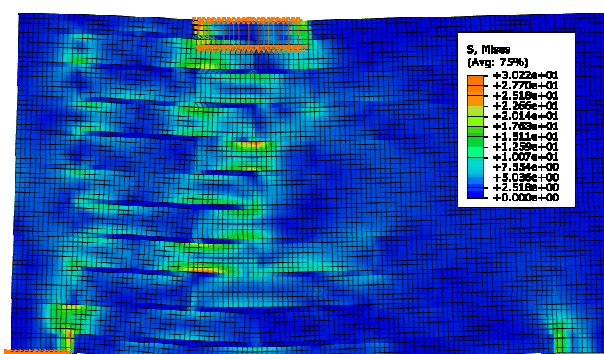
Siatka MES składa się z 8400 elementów typu CPS4R i COH2D4. Element CPS4R jest czterowęzłowym elementem płaskiego stanu naprężenia o liniowych funkcjach kształtu, zaś element COH2D4 jest dwuwymiarowym, czterowęzłowym elementem typu kohezyjnego. Po grubości warstwy zaprawy w murze przyjęto jeden element typu kohezyjnego, zaś każda cegła jest modelowana 138 elementami (23x6). Przemieszczeniowe warunki brzegowe modelujące podparcie muru przyjęto na dolnej krawędzi tak jak na rys.5. Przy lewej zewnętrznej krawędzi odebrano możliwość przesuwu w kierunku poziomym i pionowym, zaś po prawej stronie tylko w kierunku pionowym. Jednocześnie na górnej krawędzi wymuszono przemieszczenie krawędzi jednej z cegieł.



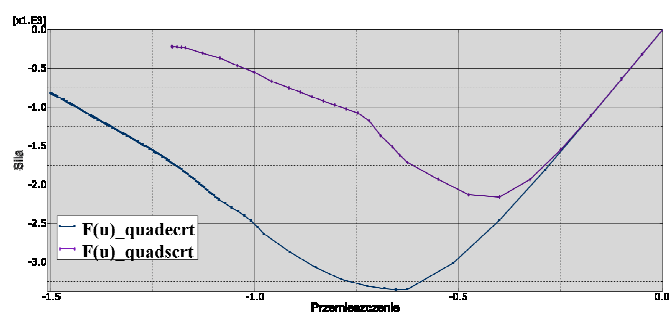
Rys.6. Wykres warstwiczny funkcji występującej w warunku (5), tj. aktywność warunku granicznego. Kolor czerwony oznacza przekroczenie warunku granicznego przy $u_2^b = -1.5[\text{mm}]$



Rys.7. Wykres warstwiczny naprężeń zastępczych Hubera-Misesa w przypadku zadania z warunkiem granicznym w postaci funkcji (5) przy $u_2^b = -1.5[\text{mm}]$



Rys.8. Wykres warstwiczny naprężeń zastępczych Hubera-Misesa w przypadku zadania z warunkiem granicznym w postaci funkcji (6) przy $u_2^b = -2.0[\text{mm}]$



Rys.9. Wypadkowa siła (na jednostkę grubości) w funkcji przemieszczenia w przypadku zadania z warunkiem granicznym w postaci funkcji (5) i funkcji (6)

4. WNIOSKI

Doświadczenia zdobyte podczas symulacji numerycznej z zastosowaniem systemu MES ABAQUS z elementami skończonymi typu kohezyjnego (o relacjach konstytutywnych podanych w pkt.2) wskazują na możliwość wykorzystania zaproponowanego w pracy modelu elementów murowych w dwóch zasadniczo różnych metodach oceny sztywności i wytrzymałości konstrukcji murowych. W metodzie pierwszej elementy murowe modelowane są mikrostrukturalnie jako cegły i zaprawa o określonych wyidealizowanych właściwościach mechanicznych. W pracy wykazano, że istotne jest modelowanie zaprawy jako ortotropowego materiału sprężysto-kruchego z degradacją i tzw. mięknięciem. Natomiast najprostszą realizacją tego celu jest zastosowanie modelu interfejsu oraz tzw. elementów kohezyjnych. Uzyskane wyniki numeryczne wskazują na jakościową ich zgodność z badaniami doświadczalnymi. Zagadnieniem otwartym jest walidacja zaproponowanego modelu. Dodatkowo, efektem zastosowania tych wyidealizowanych modeli w zadaniach na komórkach elementarnych muru wskazują, że efektywne właściwości muru na poziomie modelu makroskopowego powinny być modelowane teorią sprężysto-plastyczności, w której dodatkowo uwzględnione są właściwości degradacyjne materiału. Podane, odpowiednio uśrednione wyniki testów numerycznych z zastosowaniem modelu elementarnych komórek, wydzielonych z periodycznego elementu murowego, mogą być interpretowane jako wyniki zadania numerycznej homogenizacji i zastosowane do wyznaczenia parametrów makroskopowych modeli kontynualnych stosowanych np. w pracy [4]. Zagadnienie to powinno być celem dalszych badań.

Podziękowania

Praca jest finansowana ze środków na naukę w latach 2008 – 2011 jako własny projekt badawczy Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N N506 396435.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] ABAQUS Analysis User's Manual, Volume III: Materials, Version 6.7, Dassault Systèmes, 2007.
- [2] ABAQUS/CAE User's Manual, Version 6.7, Dassault Systèmes, 2007.
- [3] ABAQUS Theory Manual, Version 6.7, Dassault Systèmes, 2007.
- [4] Lourenco P., Zucchini, Milani G., Tralli A., Homogenisation Approaches for Structural Analysis of Masonry Buildings. In Proc. SAHC, New Delhi 2006, Vol. 1., p.59 - 75