

Sylwia HOŻEJOWSKA¹
Magdalena PIASECKA²

WYGŁADZANIE DANYCH POMIAROWYCH FUNKCJAMI TREFFTZA PRZY WYZNACZANIU WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJMOWANIA CIEPŁA

Rozpatrywane jest zagadnienie przepływu wrzącej cieczy przez odchylony od pionu minikanal. Zewnętrzną ścianą kanału jest folia stanowiąca źródło ciepła, której temperatura mierzona jest metodą termografii ciekłokrystalicznej. W celu wyselekcjonowania pomiarów o jak najmniejszych błędach pomiarowych wykorzystano rachunek wyrównawczy dla zagadnień zawarunkowanych. Przyjętym warunkiem była zależność między pomiarami temperatury, a kombinacją liniową funkcji Trefftza (T-funkcji). Rachunek wyrównawczy pozwolił na zminimalizowanie błędów pomiarowych oraz zmniejszenie średnich względnych błędów współczynników przejmowania ciepła.

MEASUREMENT RESULT SMOOTHING WITH TREFFTZ FUNCTIONS AT DETERMINATION OF HEAT TRANSFER COEFFICIENT

At boiling liquid flow in an inclined minichannel, the temperature on the outer wall of the foil which is the heat source is measured with the liquid crystal thermography method. In order to obtain the most probable foil temperature measurements, data equalisation with condition numbers has been applied. The assumed condition has been the correlation between temperature measurements and the linear combination of Trefftz functions (T-functions). Data equalisation has enabled minimalisation of measurement errors and decrease in mean relative errors of heat transfer coefficients.

1. WPROWADZENIE

Niezwykle istotnym zagadnieniem przy opracowaniu danych otrzymanych z badań eksperymentalnych są błędy pomiarowe. Wynik pomiaru na ogół różni się od wartości

¹Politechnika Świętokrzyska, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Katedra Matematyki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7.
Tel.: +48 41 3424394, Fax: +48 41 3424306, E-mail: ztspf@tu.kielce.pl

²Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, Katedra Mechaniki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7.
Tel.: +48 41 3424320, Fax: +48 41 3448698, E-mail: tmpmj@tu.kielce.pl

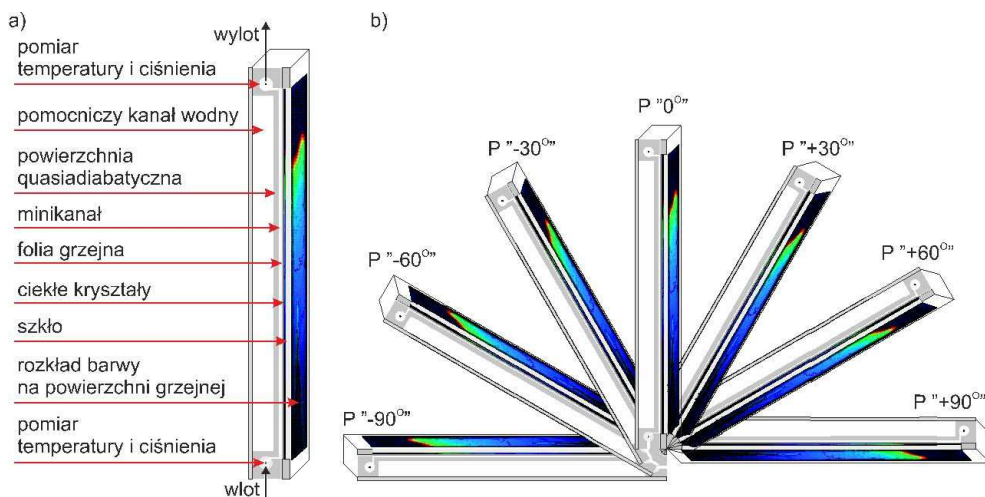
prawdziwej (rzeczywistej) wielkości mierzonej. Różnica między wynikiem a wartością prawdziwą nazywana jest błędem pomiaru. W praktyce wartość prawdziwą nie jest znana i zastępowana jest wartością umownie prawdziwą (poprawną) akceptowalną w danych okolicznościach. W [6] przeprowadzono oszacowanie dokładności pomiaru temperatury powierzchni w termografii ciekłokrystalicznej. Większość obliczeń uwzględniała błędy podstawowe - błędy przyrządów pomiarowych występujące podczas ich stosowania oraz błędy metody wynikające głównie z oddziaływania przyrządów pomiarowych na obiekt pomiaru i przepływ danych w układzie pomiarowym. Jednakże wśród błędów metody ważną grupę stanowią błędy związane ze stosowaniem przybliżonych modeli badanych zjawisk, co stanowi przedmiot zainteresowania w niniejszej pracy.

Wyznaczone w [6] błędy pomiarowe zostały wykorzystane w rachunku wyrównawczym do wyznaczenia najbardziej prawdopodobnych pomiarów temperatury i ich nowych (znacznie mniejszych) błędów. Do obliczeń numerycznych wykorzystano funkcje Trefftza (T-funkcje), którymi aproksymowane zostały nieznane rozkłady temperatury szklanej przegrody oraz folii grzejnej. Założony warunek brzegowy trzeciego rodzaju pozwolił na wyznaczenie strumienia ciepła oraz lokalnych współczynników przejmowania ciepła na styku folia – wrząca ciecz.

2. BADANIA DOŚWIADCZALNE I MODEL MATEMATYCZNY

2.1. Stanowisko badawcze, cel badań

Najważniejszym elementem stanowiska badawczego jest moduł pomiarowy z minikanalem (rys. 1a) o zmiennej orientacji przestrzennej (od położenia pionowego do poziomego z regulacją co 30° , rys.1b). Kanał posiada przekrój prostokątny o zmiennych wymiarach: głębokość (0,7; 1; 1,5 lub 2 mm) i szerokość (20 lub 40 mm).



Rys. 1. a) Schemat modułu pomiarowego, b) orientacja przestrzenna modułu pomiarowego

Przez minikanal odbywa się przepływ płynu chłodniczego (FC-72, R 123, R 11). Jedną ze ścian kanału stanowi folia grzejna zasilana prądem stałym o regulowanym natężeniu. Rozkład temperatury na powierzchni grzejnej wyznaczany jest przy wykorzystaniu metody termografii ciekłokrystalicznej [5,6]. Kanały pomocnicze w tylnej pokrywie modułu (w tym wodny) umożliwiają regulację temperatury na powierzchni minikanalu, uznawanej za quasiadiabatyczną. Celem badań jest wyznaczenie współczynnika przejmowania ciepła pomiędzy powierzchnią grzejną w płynie wrzącym w minikanale. Jedną z metod szerzej przedstawiono w pracy [4] zamieszczonej w niniejszych materiałach.

2.2. Dwuwymiarowy model przepływu ciepła

Poniższy model zbudowano przy założeniu, że w układzie ciecz – przegroda panuje stan ustalony. Pominięto jeden z wymiarów kanału biorąc do rozważań długość kanału (x) oraz wymiar prostopadły do niego (y) odnoszący się do grubości szkła (δ_G) oraz folii (δ_F). Temperatura szkła T_G oraz folii T_F spełniają odpowiednie równania

$$\text{dla szkła : } \nabla^2 T_G = 0 \quad (1)$$

$$\text{dla folii: } \nabla^2 T_F = -\frac{q_v}{\lambda_F} \quad (2)$$

$$q_v = \frac{U \cdot I}{\delta_F \cdot W \cdot L} \quad (3)$$

gdzie λ_F -współczynnik przewodzenia ciepła dla folii [W(mK)], L -długość kanału [m], W -szerokość kanału [m], U -napięcie [V], I -natężenie prądu [A], q_v - objętościowy strumień ciepła [kW/m³].

Na styku szkło-folia, gdzie znany jest rozkład temperatury $T_{\text{data}}(x)$, zachodzą warunki

$$T_F(x, \delta_G) = T_G(x, \delta_G) = T_{\text{data}}(x) \quad (4)$$

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y} = -\lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial y}, \quad y = \delta_G, \quad 0 \leq x \leq L \quad (5)$$

Na pozostałych brzegach zakłada się izolację [3,4,7].

2.3. Metoda Trefftza

Nieznana temperatura szkła T_G i folii T_F przybliżana jest liniową kombinacją T -funkcji, tzn.

$$T_G(x, y) \approx \sum_{i=0}^N b_i u_i(x, y) \quad (6)$$

$$T_F(x, y) \approx \tilde{u}(x, y) + \sum_{j=0}^M c_j u_j(x, y) \quad (7)$$

$u_i(x, y)$ - T – funkcje

$\tilde{u}(x, y)$ - rozwiązanie szczególne równania (2).

T -funkcjami nazywamy tutaj funkcje $u_i(x, y)$, które spełniają w sposób dokładny równanie Laplace'a. Funkcje $u_i(x, y)$ to funkcje harmoniczne zdefiniowane odpowiednio jako część rzeczywista i urojona liczby zespolonej $(x + iy)^n$. Przykładowe T- funkcje to: 1, x, y, xy. Własności T-funkcji i ich zastosowanie opisano szerzej w [2].

Nieznane współczynniki b_i i c_j wyliczane są metodą Trefftza z minimalizacji funkcjonału błędu opisującego błąd średniokwadratowy między nieznanymi funkcjami T_G i T_F , a zadanymi warunkami. W pierwszej kolejności wyliczana jest temperatura szkła (z rozwiązania zagadnienia prostego przewodnictwa ciepła), a następnie temperatura folii (z rozwiązania zagadnienia odwrotnego). Jeżeli znana jest temperatura folii to wyliczamy strumień ciepła oraz współczynnik przejmowania ciepła odpowiednio ze wzorów:

$$q_w = -\lambda_F \frac{\partial T_F(x, \delta_G + \delta_F)}{\partial y} \quad (8)$$

$$\alpha(x) = \frac{q_w}{(T_F(x, \delta_G + \delta_F) - T_1(x))} \quad (9)$$

$T_1(x)$ - temperatura cieczy przybliżana liniowo od temperatury wejścia $T_{1,wlot}$ do temperatury wyjścia $T_{1,wylot}$.

3. BŁĘDY POMIAROWE, WYGŁADZANIE DANYCH POMIAROWYCH

3.1. T-funkcje i rachunek wyrównawczy w „wygładzaniu” danych pomiaru temperatury powierzchni grzejnej

Otrzymane metodą termografii ciekłokrystalicznej pomiary temperatury T_k aproksymujemy wzorem

$$T_{data}(x) = \sum_{i=0}^P a_i u_i(x, \delta_G) \quad (10)$$

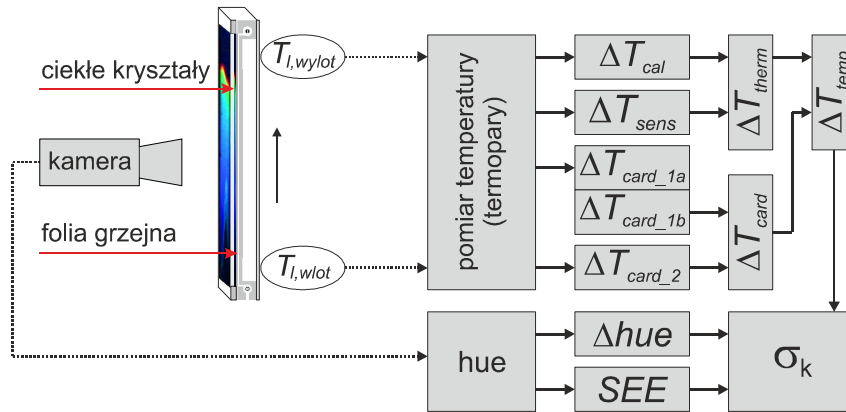
Nieznane współczynniki a_i w (10) wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów przy wykorzystaniu znajomości pomiarów temperatury folii T_k .

Nieznane rzeczywiste pomiary T_k^{cor} zależą od pomiarów T_k oraz poprawek ϵ_k , tzn.

$$T_k^{cor} = T_k + \epsilon_k \quad (11)$$

W dalszych rozważaniach zakłada się, że poprawki ϵ_k mają rozkład normalny ze średnią zero i skończona wariancją σ_k^2 [1,8]. Błąd pomiaru temperatury σ_k jest opisany dokładnie w pracy [6]. Błąd σ_k uzyskuje się z krzywej kalibracji (krzywa ta określa zależność pomiędzy temperaturą folii, a barwą ciekłych kryształów) i jest to dla danego punktu tej

krzywej błąd oszacowania wartości temperatury folii grzejnej, na podstawie barwy wskazywanej przez ciekłe kryształy. Na schemacie blokowym zamieszczonym na rys. 2, pokazano poszczególne etapy prowadzące do oszacowanie dokładności pomiaru temperatury powierzchni w termografii ciekłokrystalicznej na wykorzystywanym do badań stanowisku pomiarowym.



Rys. 2. Schemat blokowy błędów w układzie eksperymentalnym, prowadzących do wyznaczenia średniego błędu pomiaru temperatury powierzchni folii grzejnej

Wobec przyjętych założeń funkcja gęstości rozkładu normalnego poprawek ϵ_k dana jest wzorem:

$$\varphi_k = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\epsilon_k^2}{\sigma_k^2}\right] \quad (12)$$

Dla K niezależnych pomiarów temperatury T_1, T_2, \dots, T_K gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia danych wyników pomiaru (a co za tym idzie poprawek $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_K$), określona jest przez iloczyn funkcji gęstości, tzw. funkcję wiarygodności:

$$\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^K (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_K)} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \frac{\epsilon_k^2}{\sigma_k^2}\right] \quad (13)$$

Wyznaczenie skorygowanych pomiarów T_k^{coor} prowadzi do wyznaczenia maksimum funkcji wiarygodności $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_K$. Określone w ten sposób skorygowane pomiary T_k^{coor} są estymatorami zgodnymi i asymptotycznie efektywnymi tzn. że wraz ze wzrostem liczby pomiarów K wynik estymacji zbliża się do wartości rzeczywistej, przy czym wariancja tego estymatora będzie wtedy możliwie najmniejsza [1,8]. W dalszej części, przykładowo,

przez T oznaczać będziemy wektor, a przez T_k elementy wektora. Funkcja wiarygodności $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k$ osiąga wartość największą, gdy

$$W = \varepsilon^T V \varepsilon \rightarrow \min \quad (14)$$

V - macierz wag.

Dla niezależnych pomiarów V jest macierzą diagonalną postaci $V = \begin{bmatrix} 1/\sigma_k^2 \end{bmatrix}$, [1,8]. W celu wyznaczenia wektora poprawek ε dodatkowo zakładamy spełnienie warunku

$$T_{\text{data}}^{\text{corr}} - T^{\text{corr}} = 0 \quad (15)$$

$T_{\text{data}}^{\text{corr}}$ - „skorygowana” aproksymata pomiarów wyliczana ze wzoru (10).

Rozwiązując zagadnienie (14) przy warunku (15) szukamy minimum funkcji Lagrange’a

$$\Omega = \varepsilon^T V \varepsilon + 2\omega^T (T_{\text{data}}^{\text{corr}} - T^{\text{corr}}) \rightarrow \min \quad (16)$$

ω - K wymiarowy wektor mnożników Lagrange’a.

W oparciu o prawo propagacji błędów wylicza się także ocenę dokładności pomiarów σ_k^{corr} (błędy pomiarów) odnoszącą się do T_k^{corr} . Zastosowany w ten sposób rachunek wyrównawczy pozwala na „wygładzenie” danych pomiarowych ($T \rightarrow T^{\text{corr}}$) oraz zmniejszenie błędów pomiarowych ($\sigma \rightarrow \sigma^{\text{corr}}$). Rachunek wyrównawczy można również zastosować przy innym niż zaproponowany tutaj warunku (15), [3].

3.2. Oszacowanie dokładności pomiaru strumienia ciepła i współczynnika przejmowania ciepła

Błąd średni strumienia ciepła wyliczany jest ze wzoru

$$\Delta q_w = \sqrt{\left(\frac{\partial q_w}{\partial \lambda_F} \cdot \Delta \lambda_F \right)^2 + \left(\frac{\partial q_w}{\partial T_F} \cdot \Delta T_F \right)^2} \quad (17)$$

$$\Delta \frac{\partial T_F}{\partial y} = \left| \frac{\partial^2 T_F}{\partial y^2} \Delta y \right| \text{ i } \Delta y = 7,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}, [3]$$

$\Delta \lambda_F$ - dokładność pomiaru współczynnika przewodzenia ciepła, $\Delta \lambda_F = 0,01$ [W/mK], [5].

Błąd średni współczynnika przejmowania ciepła wyliczany jest ze wzoru

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial T_F} \cdot \Delta T_F\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial T_1} \cdot \Delta T_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_w} \cdot \Delta q_w\right)^2} \quad (18)$$

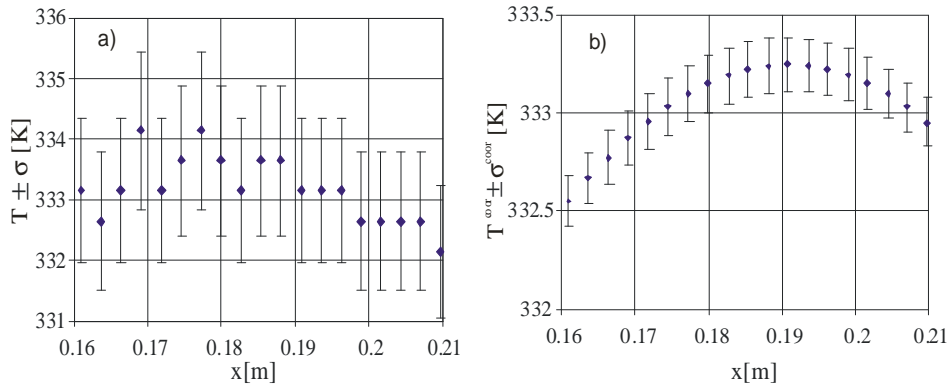
ΔT_F - dokładność pomiaru temperatury folii od strony cieczy; ponieważ folia jest cienka ($\delta_F = 1,02 \cdot 10^{-4}$ m) przyjęto $\Delta T_F(x_k, \delta_G) = \sigma_k$

ΔT_1 - błąd pomiaru temperatury płynu, przyjęto $\Delta T_1 = 0,39$ K za [5]

Δq_w - błąd strumienia ciepła liczony z (17).

4. WYNIKI

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla danych eksperymentalnych: minikanal o głębokości 1,5 mm, długości $L=40$ mm, szerokości $W=40$ mm, pochylony 30° w lewo od położenia pionowego ($P''-30''$, rys.1b), ciecz wrząca: FC-72, prędkość przepływu cieczy w kanale 0,07 m/s, gęstość strumienia masy 120 kg/(m²s), ciśnienie na wlocie do kanału około 2 bary, objętościowy strumień ciepła q_v zmienia się od $1,45 \cdot 10^5$ kW/m³ do $2,32 \cdot 10^5$ kW/m³. Pomiaru temperatury T_k (uzyskane metodą termografii ciekłokrystalicznej) zostały „wygładzone” dziewięcioma T- funkcjami ($P=8$). Zastosowanie rachunku wyrównawczego pozwoliło obliczyć najbardziej prawdopodobne wartości pomiarów temperatury T^{coor} oraz zmniejszyć błędy pomiarowe σ^{coor} , rys 3. Do dalszych obliczeń przyjęto $M=N=P=8$ oraz $\tilde{u}(x,y) = -0,5q_v \lambda_F^{-1} y^2$.



Rys.3. Rozkład temperatury i jej błędów dla nastawy #4:

a) dla pomiarów: $T \pm \sigma$,

b) po zastosowaniu rachunku wyrównawczego: $T^{coor} \pm \sigma^{coor}$.

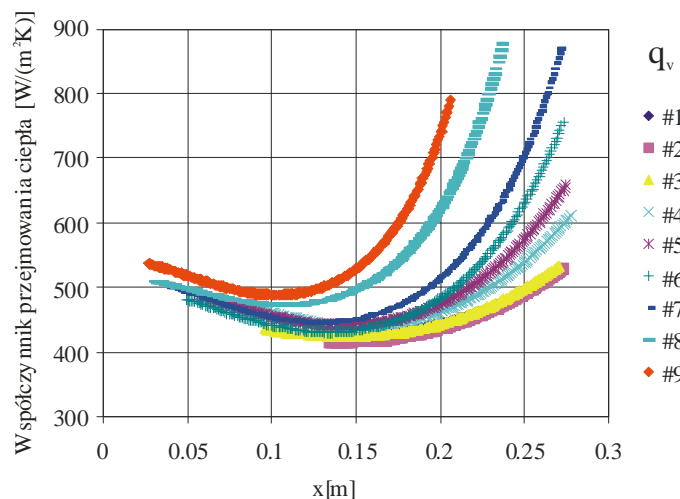
Wyliczone z (16) poprawki ϵ_k spełniają dla każdej nastawy warunek

$$|\epsilon_k| < 3\sigma_k \quad (19)$$

Przy założeniach poczynionych odnośnie wielkości ε_k funkcja W , dana wzorem (14), ma rozkład χ^2 z $K-P-1$ stopniami swobody. Test χ^2 służy do weryfikacji hipotezy o prawidłowym dopasowaniu danych pomiarowych T_k kombinacją 9-ciu T-funkcji. Przyjmujemy, że dopasowanie pomiarów T-funkcjami jest prawidłowe, gdy zachodzi warunek

$$W < \chi_{0,99}^2 (K - P - 1) \quad (20)$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że w każdym przypadku zachodzi warunek (20). Ponadto, wartość funkcji W żadnym z przypadków nie przekracza liczby stopni swobody, co jeszcze bardziej uwiarygodnia przeprowadzone obliczenia. Obliczone na podstawie danych T^{coor} lokalne współczynniki przejmowania ciepła w funkcji odległości od wlotu do minikanalu przedstawione są na rys. 4.



Rys 4. Lokalne współczynniki przejmowania ciepła w funkcji odległości od wlotu do minikanalu; q_v zmienia się od $1,45 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$ do $2,32 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$

Wyliczone względne średnie błędy strumienia ciepła oraz współczynnika przejmowania ciepła wynosiły odpowiednio 14,7% oraz 14,8%. Zastosowanie rachunku wyrównawczego nieznacznie zmniejszyło średni błąd względny współczynnika przejmowania ciepła. Przykładowo, dla nastawy #5 błąd ten zmalał z 15,1% (w obliczeniach wykorzystano pomiary T_k) do 14,8% (w obliczeniach wykorzystano pomiary wygładzone T^{coor}). Niewielka zmiana błędu wynikała z tego, że znaczący udział w wielkości błędu współczynnika przejmowania ciepła ma błąd Δq_w , który nie ulega zmianie po zastosowaniu rachunku wyrównawczego. Wygładzenie danych T-funkcjami wraz z

zastosowaniem rachunku wyrównawczego znacznie zmniejszyło różnice między aproksymatami T_F i T_G , a zadanymi warunkami brzegowymi (4). W celu oceny wpływu rachunku wyrównawczego zdefiniowano średni błąd kwadratowy między dowolnymi funkcjami f i g wzorem

$$d(f, g) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (f(x_k, \delta_G) - g(x_k, \delta_G))^2} \quad (21)$$

Poniższa tabelka przedstawia zestawienie błędów wyliczanych ze wzoru (21), gdy do obliczeń wykorzystano pomiary temperatury T oraz pomiary T^{coor} .

Tab. 1. Wartości błędu średniokwadratowego dla nastawy #4

Dane wykorzystane w obliczeniach	Wartość funkcji d dla warunku (4)
Dane T	$d(T, T_F) = d(T, T_G) = 0,35 \text{ K}$, $d(T_G, T_F) = 0,1 \text{ K}$
Dane T^{coor}	$d(T^{\text{coor}}, T_F) = d(T^{\text{coor}}, T_G) = 0,15 \text{ K}$, $d(T_G, T_F) = 0 \text{ K}$

Dla warunku (5) mamy dla każdej nastawy $d\left(\lambda_F \frac{\partial T_F}{\partial y}, \lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial y}\right) = 0$, niezależnie od wyboru danych do obliczeń.

5. WNIOSKI

- Aproksymacja pomiarów temperatury T -funkcjami spowodowała „wygładzenie” pomiarów temperatury.
- Zastosowanie rachunku wyrównawczego pozwoliło na jednoznaczne wyznaczenie jak najbardziej prawdopodobnych pomiarów T^{coor} o mniejszych odchyleniach standardowych σ^{coor} . Możliwe było również podanie kryterium poprawności dopasowania danych pomiarowych kombinacją liniową T -funkcji (test χ^2 , warunek (19), funkcja W). Ponadto, wyliczone w oparciu o pomiary T^{coor} aproksymaty T_G i T_F z mniejszym błędem średniokwadratowym spełniały warunki (4). Natomiast zastosowanie rachunku wyrównawczego miało niewielki wpływ na zmniejszenie średniego błędu względnego współczynnika przewodzenia ciepła.

Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2009-2012 jako projekt badawczy MNiSW nr N N512 354037

6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Brandt S.: *Analiza danych*, New York, Springer Verlag 1999.
- [2] Ciałkowski M., Frąckowiak A.: *Funkcje cieplne i ich zastosowanie do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła i mechaniki*, Poznań, WPP 2000.
- [3] Hozejowska S., Piasecka M., Poniewski M. E.: *Boiling heat transfer in vertical minichannels. Liquid crystal experiments and numerical investigations*, Int. J. of Thermal Sciences, 2008.
- [4] Piasecka M., Maciejewska B.: *Zastosowanie metody współczynników wrażliwości z wykorzystaniem funkcji Trefftza w badaniach wymiany ciepła w minikanale*, w tymże.
- [5] Piasecka M.: *Teoretyczne i eksperymentalne badania wymiany ciepła przy wrzeniu w przepływie przez wąski kanał*, praca doktorska, Politechnika Świętokrzyska, Wydział Mechatroniki i Budowy Maszyn, 2002.
- [6] Piasecka M.: *Oszacowanie dokładności pomiaru temperatury powierzchni w termografii ciekłokrystalicznej*, w tymże.
- [7] Piasecka M., Hozejowska S., Poniewski M. E.: *Experimental error analysis and heat polynomial method*, Proc. of the Third International Conference on Microchannels and Minichannels, Paper No. ICMM2005-75142, Toronto, 2005.
- [8] Szargut J.: *Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej*, Katowice, Ossolineum 1984.