

*układ wagonów, równania ruchu,
prędkość, przyspieszenie,
siły w sprężynach*

Wacław SZCZEŚNIAK¹
Magdalena ATAMAN¹

DRGANIA UKŁADU WAGONÓW O TRZECH STOPNIACH SWOBODY

W pracy przeanalizowano drgania swobodne trzech sztywnych wagonów o jednakowych masach połączonych jednakowymi elementami sprężystymi. Pierwszy wagon porusza się ze stałą prędkością v_0 uderzając i łącząc się z wagonem drugim. Układ ma trzy stopnie swobody. Trzy równania ruchu rozwiązano analitycznie. Wyniki rozwiązania przedstawiono na rysunkach. Pokazano wykresy drgań, przyspieszenia i siły wewnętrzne w sprężynach.

VIBRATIONS OF WAGON'S SYSTEM MODELED WITH THREE DEGREE OF FREEDOM

In the paper free vibrations of system of three rigid wagons is analyzed. Wagons of mass m are connected by springs of constant k . The first wagon is moving with constant velocity v_0 , impacts and connects to the second wagon. Wagons are modeled as three degree of freedom system. Equations of motion are solved analytically. Solution of the problem is illustrated by diagrams of vibrations, velocities accelerations and forces in spring elements.

1. WSTĘP

W pracy analizujemy drgania swobodne trzech sztywnych wagonów o jednakowych masach m połączonych jednakowymi sprężynami o stałej k . Pierwszy wagon porusza się po idealnie gładkim, poziomym sztywnym podłożu z zadaną prędkością v_0 , uderzając w dwa pozostałe szczipione, nieruchome wagony i szczipia się z wagonem drugim, tak jak pokazano to na rysunku 1. Układ doznaje drgań swobodnych. W komunikacie wyprowadzimy trzy równania ruchu tego układu mającego trzy stopnie swobody. Wyznamy drgania trzech współrzędnych uogólnionych $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, stosując analityczne rozwiązanie trzech liniowych równań ruchu. Wyznamy przyspieszenia

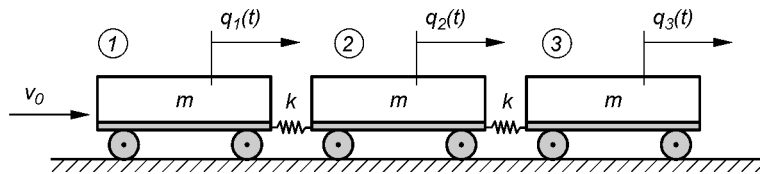
¹ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, Al. Armii Ludowej 16,
tel.: +48 22 234 65 07, e-mail: w.szczesniak@il.pw.edu.pl;
tel.: +48 22 234 64 70, e-mail: m.ataman@il.pw.edu.pl;

trzech wagonów i siły dynamiczne w sprężynach łączących. Wykorzystując pakiet Wolframa Mathematica, wyniki rozwiązania zadania przedstawimy na rysunkach.

2. DRGANIA SWOBODNE UKŁADU ZŁOŻONEGO Z TRZECH WAGONÓW

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku 1 trzy równania ruchu wyprowadzone metodą kinetostatyki są następujące:

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + k(q_1 - q_2) &= 0, \\ m\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) + k(q_2 - q_3) &= 0, \\ m\ddot{q}_3 + k(q_2 - q_3) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$



Rys. 1. Schemat dynamiczny zadania

Liniowe równania ruchu (1) rozwiązujemy przy sześciu warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= 0, & q_2(0) &= 0, & q_3(0) &= 0, \\ \dot{q}_1(0) &= v_0, & \dot{q}_2(0) &= 0, & \dot{q}_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Po analitycznym rozwiązaniu układu równań ruchu (1) przy warunkach początkowych (2) otrzymujemy następujące wyrażenia na trzy uogólnione współrzędne Lagrange'a (3) oraz przyspieszenia (4):

$$\begin{aligned} q_1(t) &= v_0 \frac{6t\sqrt{k} + \sqrt{m} \left[9 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right]}{18\sqrt{k}}, \\ q_2(t) &= \frac{1}{9} v_0 \left[3t - \frac{\sqrt{3m} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)}{\sqrt{k}} \right], \\ q_3(t) &= v_0 \frac{6t\sqrt{k} + \sqrt{m} \left[-9 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right]}{18\sqrt{k}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1(t) &= -\frac{v_0}{6} \sqrt{\frac{k}{m}} \left[3 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right], \\
\ddot{q}_2(t) &= v_0 \sqrt{k} \left[\frac{\sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right)}{\sqrt{3m}} \right], \\
\ddot{q}_3(t) &= \frac{v_0}{6} \sqrt{\frac{k}{m}} \left[3 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) - \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right].
\end{aligned} \tag{4}$$

Siły dynamiczne pomiędzy wagonami 1-2 oraz 2-3 wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
F_{1-2}(t) &= k(q_1 - q_2) = \frac{1}{6} v_0 \sqrt{km} \left[3 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right], \\
F_{2-3}(t) &= k(q_2 - q_3) = \frac{1}{6} v_0 \sqrt{km} \left[3 \sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) - \sqrt{3} \sin\left(t\sqrt{\frac{3k}{m}}\right) \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Całkowita siła dynamiczna działająca na wagon drugi wynosi:

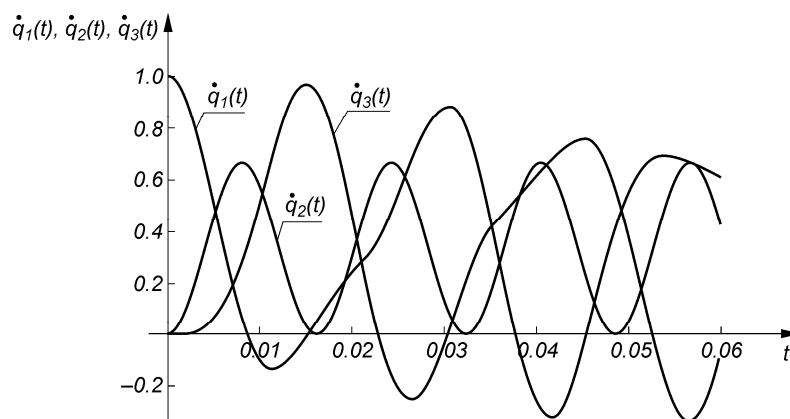
$$F_2 = F_{1-2} + F_{2-3} = v_0 \sqrt{km} \left[\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \right]. \tag{6}$$

3. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

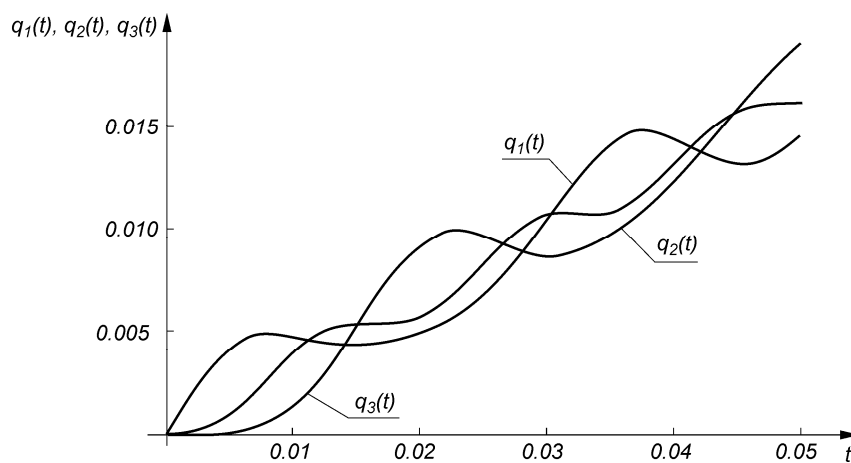
W rozwiązywanym przykładzie przyjęto, że masy wagonów są jednakowe i wynoszą $m = 20000$ kg, charakterystyki sprężyste ich połączenia też są jednakowe i równe $k = 10^9$ N/m. Prędkość manewrowa wagonu pierwszego jest mała i wynosi $v_0 = 1$ m/s. Na rysunku 2 przedstawiono przebiegi prędkości wagonów.

Na rysunku 3 pokazano wykresy przemieszeń dynamicznych $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ w bardzo krótkim czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s, aby uwypuklić przesunięcie fazowe w czasie wynikające z falowego charakteru zderzenia wagonu pierwszego z dwoma pozostałymi. $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s. Na rysunku 4 pokazano wykresy przyspieszeń wagonów $\ddot{q}_1(t)$, $\ddot{q}_2(t)$, $\ddot{q}_3(t)$. Maksymalne przyspieszenie wagonu drugiego, jak wynika z (4), wynosi

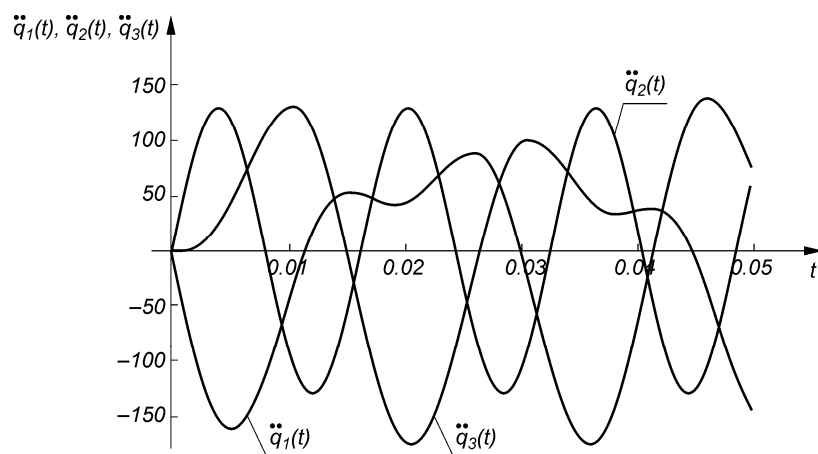
$$\ddot{q}_{2\max} = v_0 \sqrt{\frac{k}{3m}}.$$



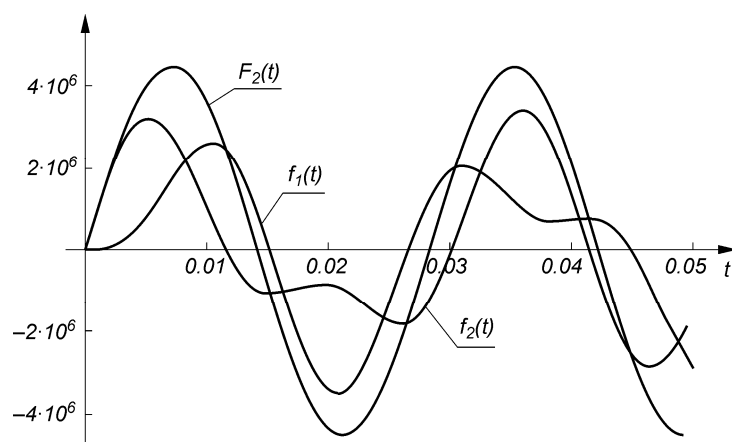
Rys. 2. Wykresy prędkości $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$ i $\dot{q}_3(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.06)$ s, $v_0 = 1$ m/s, $m = 20000$ kg i $k = 10^9$ N/m. Widoczne jest przesunięcie początkowe wykresów prędkości wynikające z falowego charakteru zjawiska uderzenia



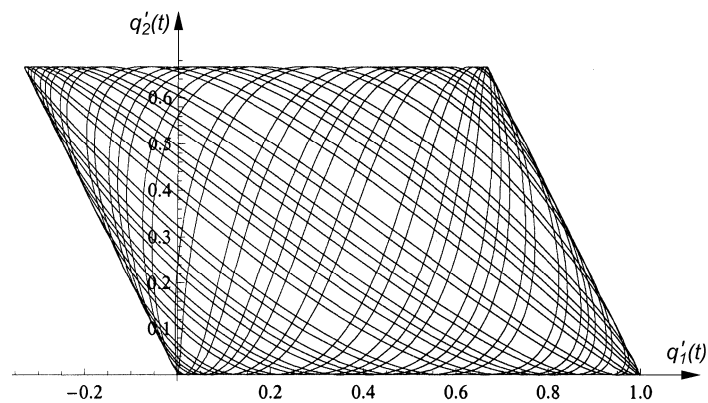
Rys. 3. Wykresy $q_1(t)$, $q_2(t)$ i $q_3(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s, $v_0 = 1$ m/s, $m = 20000$ kg i $k = 10^9$ N/m



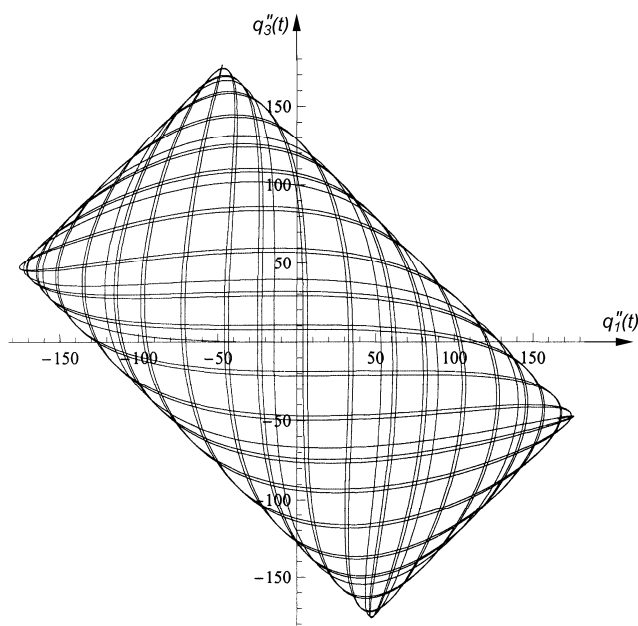
Rys. 4. Wykresy przyspieszeń $\ddot{q}_1(t)$, $\ddot{q}_2(t)$ i $\ddot{q}_3(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05) s$, $v_0 = 1 m/s$, $m = 20000 kg$ i $k = 10^9 N/m$



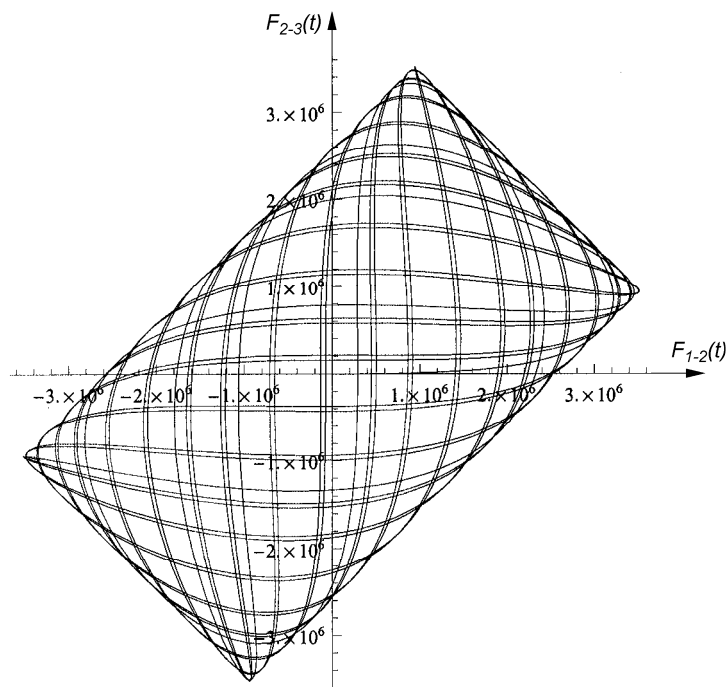
Rys. 5. Wykresy sił dynamicznych $F_{1-2}(t)$, $F_{2-3}(t)$ i $F_2(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05) s$, $v_0 = 1 m/s$, $m = 20000 kg$ i $k = 10^9 N/m$



Rys. 6. Wykresy trajektorii prędkości $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$, i $\dot{q}_3(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s, $v_0 = 1$ m/s, $m = 20000$ kg i $k = 10^9$ N/m



Rys. 7. Wykresy trajektorii przyspieszeń $\ddot{q}_1(t)$ i $\ddot{q}_3(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s, $v_0 = 1$ m/s, $m = 20000$ kg i $k = 10^9$ N/m



Rys. 8. Wykresy trajektorii przyspieszeń $F_{1-2}(t)$ i $F_{2-3}(t)$ w przypadku drgań swobodnych układu: w czasie $t \in (0 \leftrightarrow 0.05)$ s, $v_0 = 1$ m/s, $m = 20000$ kg i $k = 10^9$ N/m

4. WNIOSKI

W pracy przeanalizowano drgania swobodne układu złożonego z trzech sztywnych wagonów o takiej samej masie każdy, połączonych sprężynami o jednakowych stałych sprężynowych. Pierwszy z wagonów porusza się z małą prędkością i uderza w pozostałe dwa połączone wagony i łączy się z wagonem drugim. Podano równania ruchu układu o trzech stopniach swobody i wyznaczono ich analityczne rozwiązanie. W przykładzie obliczeniowym wyznaczono poziome przemieszczenia dynamiczne wszystkich wagonów po zderzeniu, ich prędkości i przyspieszenia, siły dynamiczne w sprężynach oraz siłę ściskającą działającą na wagon numer dwa. Wykresy tych wielkości w czasie pokazano na rysunkach 2-5.

5. LITERATURA

- [1] Smart E.H.: *Advanced Dynamics, Vol. I and Vol. II*. Macmillan and CO., Limited London 1951.
- [2] Szcześniak W.: *Dynamika analityczna i <<MATHEMATICA>> w zadaniach i przykładach obliczeniowych*. OWPW, Warszawa 2010.

- [3] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna dla zaawansowanych*. OWPW, Warszawa 2007.
- [4] Szcześniak W.: *Dynamika teoretyczna w zadaniach dla dociekliwych*. OWPW, Warszawa 2010.
- [5] Jakowlew I.A. (ed.): *Sbornik zadacz po obszczemu kursu fizyki. Mechanika*. Nauka, Moskwa 1977.
- [6] Piatnickij E.S., Truchan N.M., Chanukajew Ju.I., Jakowienko G.N.: *Sbornik zadacz po analitycznej mechanice*. Nauka-Fizmatlit, Moskwa 1980 i 1996.
- [7] Mieszczerski I.W.: *Sbornik zadacz po teoretycznej mechanice*. GRF-ML, Nauka, Moskwa 1914-1986. (36 wydań).
- [8] Karelitz G.B., Ormondroyd J., Garreltz J.M.: *Problems in mechanics. Based on the original collection of I.V. Mestchersky*. The MacMillan Company, New York 1939.
- [9] Neuber H.: *Lösungen zur Aufgabensammlung Mestcherski*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956.
- [10] Szcześniak W., Ataman M.: *Zastosowanie pakietu Mathematica w mechanice analitycznej*. Prace Naukowe Politechniki Radomskiej, Transport nr 1(17), Radom 2003, str. 617-626.
- [11] Kolesznikow K.S. i inni.: *Sbornik zadacz po teoretycznej miechnanikie*. Nauka, Moskwa 1983.
- [12] Szcześniak W.: *Drgania płyt pod wpływem obciążenia impulsowego*. „Theoretical Foundations of Civil Engineering” V, Warszawa 1997, pp. 386-392.
- [13] Morozow S.I. *Souderenije tiel. Klasiczeskaja teoria udara, Czast 1*. Archangiesk 2001.
- [14] Batujew G.S. i inni.: *Inżynieryjne metody issledowanija udara*. Maszynostrojenije, Moskwa 1969.
- [15] Aleksandrow E.W., Sokolińskij B.W.: *Prikladnaja teoria i rasczety udarnych sistem*. Nauka, Moskwa 1969.
- [16] Goldsmith W.: *Impact*. Arnold, London, 1960.
- [17] Goldsmith W.: *Impact. The Collision of Solid, Vol. 11, No. 11*. 1963 Appl. Mech. Reviews.
- [18] Goldsmith W.: *Bouncing from one collision to the next, Vol. 52, No. 3*. 1999 Appl. Mech. Reviews.
- [19] Rabinowicz I.M., Sinicyń A.P., Łuzina O.W., Terenina B.M.: *Rasczet sooruzenij na impusywnyje wozdejszwija*. Izd. Lit. Striot. Moskwa, 1970.
- [20] Jonson W.: *Structural Impact*. Cambridge Univer. Press London 1989.
- [21] Jonson W.: *Impact Strength of Materials*. Arnold, London 1972.