

JEMIELITA Grzegorz¹
KOZYRA Zofia²

DRGANIA BELKI NA DWUPARAMETROWYM PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

Praca dotyczy wyznaczania drgań belki na dwuparametrowym podłożu sprężystym obciążonej symetrycznie dwiema siłami przyłożonymi w sposób nagły oraz dwoma impulsami.

VIBRATION OF BEAM WITH TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATION

This paper presents method to obtain vibrations of beam with two-parameter elastic foundation under symmetric dynamic loading.

1. WSTĘP

Rozpatrzmy belkę spoczywającą na dwuparametrowym podłożu sprężystym o więzach dwustronnych. Zakładamy, że znana jest masa belki, sztywności podłoża oraz przyjmujemy, że działające siły są bezmasowe a podłoże jest nieinercyjne.

Na Rys. 1. pokazano rozpatrywaną belkę, którą z pewnym przybliżeniem można traktować, jako uproszczony model podkładu kolejowego, na który pośrednio działają gwałtownie przyłożone siły skupione.

Przyjęty model podłoża jest opisany równaniem (por. [1]):

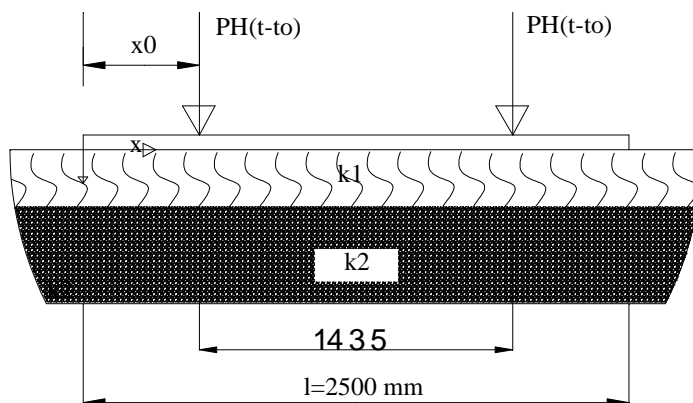
$$p = k_1 w - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

gdzie w jest przemieszczeniem, a k_1, k_2 oznaczają sztywności odpowiednich warstw i

wyrażone są w jednostkach odpowiednio $\left[\frac{N}{m^2} \right]$, $[N]$.

¹Politechnika Warszawska Wydział Inżynierii Lądowej, Katedra Mechaniki Budowli i Zastosowań Informatyki, Al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, Tel. (22) 234-65-20, Fax. (22) 825-88-99; SGGW, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Katedra Inżynierii Budowlanej, ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa, Tel./Fax: (+4822) 593-51-01, g.jemielita@il.pw.edu.pl

²Politechnika Warszawska Wydział Inżynierii Lądowej, Katedra Mechaniki Budowli i Zastosowań Informatyki, Al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa, Tel. (22) 234-64-31, Fax. (22) 825-88-99, z.kozyra@il.pw.edu.pl



Rys.1. Schemat analizowanej konstrukcji

2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE

Równanie różniczkowe drgań belki o stałej sztywności EJ spoczywającej na podłożu sprężystym jest postaci:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_1 w - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (2)$$

w której μ jest gęstością masy belki na jednostkę długości.

Niech w chwili t_0 w punktach o współrzędnych (x_0) i $(l - x_0)$ zostaną nagle przyłożone do belki siły bezmasowe P . Obciążenie to można zapisać następująco:

$$q(x, t) = PH(t - t_0) [\delta(x - x_0) + \delta(x - l + x_0)], \quad (3)$$

gdzie: H - funkcja Heaviside'a,

δ - dystrybucja Diraca.

Wprowadzając współrzędną bezwymiarową $\xi = \frac{x}{l}$ równanie (2) zapisujemy w postaci:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \kappa^2 w + \hat{\lambda}^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{Pl^3}{EJ} [\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi - (1 - \xi_0))] H(t - t_0), \quad (4)$$

w której wprowadzono następujące, bezwymiarowe współczynniki:

$$2\gamma = \frac{k_2 l^2}{EJ}, \quad \kappa^2 = \frac{k_1 l^4}{EJ} \text{ oraz } \hat{\lambda}^4 = \frac{\mu l^4}{EJ} \left[s^2 \right]. \quad (5)$$

Szukamy ugięcia przy $t > t_0$, tj. wtedy, gdy $H(t - t_0) = 1$. W tym przypadku równanie (4) zapisujemy następująco:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \kappa^2 w + \hat{\lambda}^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{Pl^3}{EJ} [\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi - (1 - \xi_0))] \quad (6)$$

Rozwiązanie tego równania przy jednorodnych warunkach początkowych

$$w(\xi, t_0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(\xi, t_0) = 0 \quad (7)$$

przewidujemy w postaci

$$w(\xi, t) = w_s(\xi) + w_d(\xi, t), \quad (8)$$

w której w_s jest całką szczególną będącą rozwiązaniem równania (por. [2,3]):

$$\frac{d^4 w_s}{d\xi^4} - 2\gamma \frac{d^2 w_s}{d\xi^2} + \kappa^2 w_s = \frac{Pl^3}{EJ} [\delta(\xi - \xi_0) + \delta(\xi - (1 - \xi_0))]. \quad (9)$$

Postać rozwiązania powyższego równania zależy od wartości współczynników γ i κ . Pierwiastki równania charakterystycznego równania (9) są równe:

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}}. \quad (10)$$

Ponieważ współczynniki $\gamma \geq 0$, $\kappa \geq 0$, to mamy pięć przypadków i pięć postaci rozwiązania jednorodnego równania (9), a mianowicie:

1. przy $\gamma^2 > \kappa^2 > 0$ otrzymujemy równanie ugięcia w postaci:

$$w_{s0} = C_1 ch(\alpha\xi) + C_2 sh(\alpha\xi) + C_3 ch(\beta\xi) + C_4 sh(\beta\xi), \quad (11)$$

w której

$$\alpha = \sqrt{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}}, \quad \beta = \sqrt{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2}}. \quad (12)$$

2. przy $\gamma^2 < \kappa^2$, otrzymujemy

$$w_{s0} = C_1 ch(\varepsilon\xi) \cos(\eta\xi) + C_2 ch(\varepsilon\xi) \sin(\eta\xi) + C_3 sh(\varepsilon\xi) \cos(\eta\xi) + C_4 sh(\varepsilon\xi) \sin(\eta\xi), \quad (13)$$

gdzie

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\kappa + \gamma}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\kappa - \gamma}, \quad (14)$$

3. przy $\kappa = 0$, $\alpha = \sqrt{2\gamma}$, $\beta = 0$, a rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja

$$w_{s0} = C_1 ch(\alpha\xi) + C_2 sh(\alpha\xi) + C_3 + C_4 \alpha\xi. \quad (15)$$

4. przy $\gamma^2 = \kappa^2$, otrzymujemy

$$\alpha = \beta = \sqrt{\gamma} \quad (16)$$

oraz

$$w_{s0} = C_1 ch(\sqrt{\gamma}\xi) + C_2 sh(\sqrt{\gamma}\xi) + \xi\sqrt{\gamma} [C_3 ch(\sqrt{\gamma}\xi) + C_4 sh(\sqrt{\gamma}\xi)] \quad (17)$$

5. dla $\gamma = 0$ mamy następującą funkcję w_s

$$\begin{aligned} w_{s0} = & C_1 ch\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) + C_2 sh\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) + \\ & + C_3 ch\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) + C_4 sh\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\xi\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Całka $w_d(\xi, t)$ jest rozwiązaniem równania:

$$\frac{\partial^4 w_d}{\partial \xi^4} - 2\gamma \frac{\partial^2 w_d}{\partial \xi^2} + \kappa^2 w_d + \hat{\lambda}^4 \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = 0. \quad (19)$$

Przedstawiając rozwiązanie równania (19) w postaci iloczynu funkcji zmiennej przestrzennej $w_p(\xi)$ i funkcji zmiennej czasu $F(t)$

$$w_d(\xi, t) = w_p(\xi) \cdot F(t) \quad (20)$$

otrzymujemy następujące dwa równania:

$$w_p^{IV}(\xi) - 2\gamma w_p'' + (\kappa^2 - \lambda^4)w_p = 0 \quad (21)$$

oraz

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \omega^2 F = 0, \quad (22)$$

przy czym bezwymiarowy współczynnik λ wyrażamy wzorem

$$\lambda^4 = \frac{\mu l^4}{EJ} \omega^2 = \hat{\lambda}^4 \omega^2 > 0. \quad (23)$$

Częstości drgań własnych ω_i znajdziemy z rozwiązania równania (21). Pierwiastki równania charakterystycznego tego równania są równe

$$r_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \lambda^4 - \kappa^2}} \quad (24)$$

Rozpatrzmy następujące przypadki:

a) $\gamma^2 > \kappa^2 > \lambda^4$

Rozwiązanie równania (21) zapisujemy następująco:

$$w_p = C_1 ch(\hat{\alpha}\xi) + C_2 sh(\hat{\alpha}\xi) + C_3 ch(\hat{\beta}\xi) + C_4 sh(\hat{\beta}\xi), \quad (25)$$

w którym teraz oznaczono

$$\hat{\alpha} = \sqrt{\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \lambda^4 - \kappa^2}}, \quad \hat{\beta} = \sqrt{\gamma - \sqrt{\gamma^2 + \lambda^4 - \kappa^2}}, \quad (26)$$

b) $\kappa^2 < \lambda^4$

$$w_p = C_1 ch(\hat{\alpha}\xi) + C_2 sh(\hat{\alpha}\xi) + C_3 \cos(\tilde{\beta}\xi) + C_4 \sin(\tilde{\beta}\xi), \quad (27)$$

gdzie

$$\tilde{\beta} = \sqrt{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + \lambda^4 - \kappa^2}} \quad (28)$$

c) $\kappa^2 > \gamma^2 + \lambda^4$

$$w_{s,0} = C_1 ch(\hat{\varepsilon}\xi) \cos(\hat{\eta}\xi) + C_2 ch(\hat{\varepsilon}\xi) \sin(\hat{\eta}\xi) + C_3 sh(\hat{\varepsilon}\xi) \cos(\hat{\eta}\xi) + C_4 sh(\hat{\varepsilon}\xi) \sin(\hat{\eta}\xi), \quad (29)$$

gdzie

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{\kappa^2 - \lambda^4} + \gamma}, \quad \hat{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{\kappa^2 - \lambda^4} - \gamma}, \quad (30)$$

Wykorzystując następujące warunki brzegowe:

$$M(0) = M(1) = 0 \quad \text{czyli} \quad w''(0) = w''(1) = 0, \quad (31)$$

$$T(0) = T(1) = 0 \quad \text{czyli} \quad w'''(0) = w'''(1) = 0. \quad (32)$$

otrzymamy jednorodny algebraiczny układ równań do wyznaczenia stałych C_1, C_2, C_3, C_4 . Z przyrównania do zera wyznacznika głównego tego układu otrzymujemy częstości drgań własnych ω_i oraz funkcje własne $w_p^i(\xi)$.

Rozwiązaniem równania (22) są funkcje:

$$F_n(t) = A_n \cos[\omega_n(t - t_0)] + B_n \sin[\omega_n(t - t_0)] \quad (33)$$

Po wykorzystaniu warunków początkowych (7), rozwiązanie zagadnienia przedstawiamy w postaci

$$w(\xi, t) = w_s(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} w_p^i(\xi) \cdot F_i(t) \quad \text{przy} \quad t \geq t_0. \quad (34)$$

3. WYZNACZENIE FUNKCJI $w_s(\xi)$

Przyjmując, że spełniona jest nierówność $\gamma^2 > \kappa^2$ oraz wykorzystując symetrię zagadnienia funkcję ugięcia zapisujemy następująco:

$$w_s = \begin{cases} w_1 = C_1 ch(\alpha\xi) + C_2 sh(\alpha\xi) + C_3 ch(\beta\xi) + C_4 sh(\beta\xi) & \text{dla} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0 = \frac{x_0}{l} \\ w_2 = C_5 ch(\alpha\xi) + C_6 sh(\alpha\xi) + C_7 ch(\beta\xi) + C_8 sh(\beta\xi) & \text{dla} \quad \xi_0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (35)$$

Stałe wyznaczamy z warunków brzegowych i warunków ciągłości w postaci:

$$M_1(0) = -\frac{EJ}{l^2} w_1''(0) = 0, \quad (36)$$

$$T_1(0) = -\frac{EJ}{l^3} w_1'''(0) = 0, \quad (37)$$

$$w_1(\xi_0) = w_2(\xi_0), \quad (38)$$

$$w_1'(\xi_0) = w_2'(\xi_0), \quad (39)$$

$$M_1(\xi_0) = M_2(\xi_0) \quad \text{czyli} \quad w_1''(\xi_0) = w_2''(\xi_0), \quad (40)$$

$$T_1(\xi_0) - T_2(\xi_0) = P \quad \text{czyli} \quad w_2'''(\xi_0) - w_1'''(\xi_0) = \frac{Pl^3}{EJ}, \quad (41)$$

$$w_2'\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (42)$$

$$T_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{EJ}{l^3} w_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad (43)$$

Ponieważ wzory na te stałe są bardzo rozbudowane, wyznaczanie drgań układu należy przeprowadzać na przykładach liczbowych.

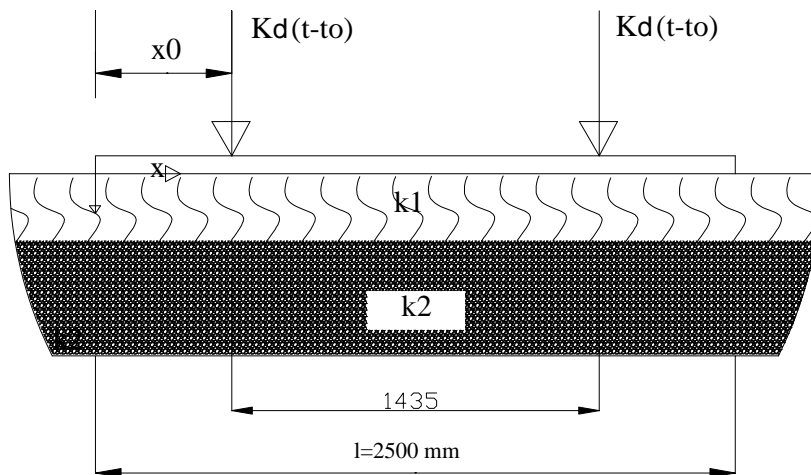
4. DZIAŁANIE IMPULSU

Rozpatrzmy działanie 2 impulsów przyłożonych w chwili t_0 na belkę w sposób symetryczny (por. Rys. 2.).

Drgania wywołane dwoma impulsami można otrzymać korzystając z następującego wzoru:

$$w^K = -\frac{K}{P} \frac{\partial w}{\partial t_0}, \quad (44)$$

w którym impuls $K = \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} P\Delta t_0 = \text{const.}$



Rys. 2. Schemat belki obciążonej impulsami

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] Jemielita G.: *Governing equations and boundary conditions of generalized model of elastic foundation*. J. Theor. Appl. Mech. **32**, 4,(1994), 887-901.
- [2] Kączkowski Z.: *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady 2000.
- [3] Jemielita G., Kozyra Z., *Statics of beam with arbitrary stiffness resting on a variable, unidirectional, two-parameter foundation*; Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions, Warsaw, 2010, pp. 143-150, Ed. by W. Szcześniak, OWPW, ISBN 978-83-7207-894-0