

Stanisław JEMIOŁO¹
Marcin GAJEWSKI²

MODELOWANIE HIPERSPRĘŻYSTYCH KOMPOZYTÓW ZBROJONYCH WŁÓKNAMI

W pracy stosowane są modele konstytutywne niejednorodnych materiałów hipersprężystych zbrojonych włóknami. Modele te, zaproponowane w pracach autorów [3,4] redukują się do klasycznych modeli kompozytów włóknistych. o elastomerowej matrycy zbrojonej kilkoma rodzinami włókien o znacznej wytrzymałości na rozciąganie. Zakłada się, że włókna deformują się jednowymiarowo i są w pełni połączone z matrycą. Modele tego typu zaproponowane w pracach autorów zostały zaprogramowane w systemie metody elementów skończonych ABAQUS [1,2]. Podstawowym celem pracy jest pokazanie potencjalnych możliwości zastosowania tych modeli. Dyskutowane są rozwiązania numeryczne wybranych nieliniowych zagadnień brzegowych.

MODELLING OF HYPERELASTIC FIBRE-REINFORCED MATERIALS

In the paper the class of constitutive models of hyperelastic non-homogeneous composite materials with isotropic matrix reinforced with continuous fiber families are used. Considered class of constitutive models in approximation reduce to the classical models of fibrous composites, where full bounding between matrix and fiber is assumed as well as one-dimensional fiber deformation, cf. [3,4]. Such model was proposed in author's papers [3,4] and implemented in FEM system ABAQUS [1,2]. The main goal of this paper is to show the possible application of the proposed models. The numerical solutions of some nonlinear boundary value problems are discussed.

1. WSTĘP

Modele niejednorodnych materiałów kompozytowych stosowane w tym artykule, zostały zaproponowane i zaimplementowane w systemie metody elementów skończonych ABAQUS [1,2] we wcześniejszych pracach autorów [3,4]. Są to z punktu widzenia teorii

¹ Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, al. Armii Ludowej 16, tel.: + 48 22 234-51-34, e-mail: s.jemiolo@il.pw.edu.pl

² Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, 00-637 Warszawa, al. Armii Ludowej 16, tel.: + 48 22 234-51-34, e-mail: m.gajewski@il.pw.edu.pl

relacji konstytutywnych hipersprężystości materiałów anizotropowych [6] modele uproszczone, które w aproksymacji liniowej sprowadzają się do klasycznych modeli materiałów kompozytowych wzmocnionych włóknami. Należy zaznaczyć, że implementacje numeryczne, w komercyjnych programach metody elementów skończonych takich jak np. ABAQUS, relacji konstytutywnych anizotropowych materiałów hipersprężystych są nieliczne i powstały dopiero w ostatnich kilku latach, por. literaturę cytowaną w pracach [3,4] oraz dyskusję w monografii [5]. Oznacza to także, że dostępne w literaturze rozwiązania nieliniowych zagadnień brzegowych z tego typu materiałami są nieliczne i słabo przebadane. Wobec tego ograniczenie rozważań do modeli materiałów kompozytowych, w których energia sprężystości jest funkcją poliwykłą (patrz pkt.2), jest racjonalne, gdyż w tym przypadku istnieją twierdzenia o istnieniu rozwiązania zadań brzegowych statyki. W niniejszej pracy zamieszczamy rozwiązania numeryczne trzech wybranych zagadnień brzegowych, które ilustrują potencjalne zastosowania zaimplementowanych modeli teoretycznych. Są to modele ściśliwych, transversalnie izotropowych materiałów hipersprężystych. Dwa przykłady ilustrują tzw. zjawiska inflacji kuli i cylindra, które są dobrze poznane w przypadku nieściśliwych, izotropowych materiałów hipersprężystych. W tych przypadkach są także znane rozwiązania analityczne. Dodatkowo, w przypadku cienkościennej sfery (balonu) istnieją także wyniki badań doświadczalnych, które są jakościowo i ilościowo zgodne z rozwiązaniami analitycznymi, patrz Rozdział 5 w pracy [5] oraz obszerną literaturę tam dyskutowaną i cytowaną. Trzecie zadanie brzegowe zamieszczone w pracy, to nierównomierne ściskanie walca. W każdym zadaniu dyskutowanych jest kilka przypadków ułożenia włókien zbrojenia w matrycy. Poszukiwane są tylko te rozwiązania zadań nieliniowych, które ze względu na zastosowane warunki brzegowe, charakteryzują się wymaganą symetrią rozwiązania, co pozwala na porównanie uzyskanych rozwiązań numerycznych z analogicznymi rozwiązaniami zadań z ściśliwymi hipersprężystymi materiałami izotropowymi.

2. MODEL HIPERSPRĘŻYSTEGO MATERIAŁU ZBROJONEGO WŁÓKNAMI

Zgodnie z przyjętymi w pracach [3,4] założeniami, jednostkową energię sprężystości (ES) materiału hipersprężystego zbrojonego kilkoma rodzinami włókien zaproponowano w następującej postaci:

$$\Psi = \left(1 - \sum_{n=1}^N p_n\right) \Psi_M + \sum_{n=1}^N p_n \Psi_{Z_n}, \quad (1)$$

gdzie Ψ_M jest funkcją ESM matrycy (funkcją izotropową), a Ψ_{Z_n} są funkcjami ESZ rodzin włókien, zaś p_n oznacza udział objętościowy danej rodziny włókien w jednostce objętości materiału ($N_{\max} = 6$) Zakładamy także, że materiał matrycy jest materiałem izotropowym, którego funkcja ESM jest funkcją izotropową tensorów deformacji: prawego $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ i lewego $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$, gdzie \mathbf{F} jest tzw. tensorem gradientu deformacji o dodatnim wyznaczniku $J = \det \mathbf{F} > 0$, zaś symbol „ T ” oznacza transpozycję tensora.

Funkcje ESZ nagromadzonej w n -tej rodzinie włókien, które „pracują” jednowymiarowo w kierunku $\mathbf{m}_n(\mathbf{X})$ są następujące:

$$\Psi_{z_n} = \frac{E_{z_n}}{4} (I_{4n} - 1)^2, \tag{2}$$

gdzie

$$I_{4n} = \text{tr} \hat{\mathbf{M}}_n, \tag{3}$$

a tensory $\hat{\mathbf{M}}_n$ oznaczają tensory parametryczne $\mathbf{M}_n = \mathbf{m}_n \otimes \mathbf{m}_n$ w konfiguracji aktualnej, obliczone zgodnie ze wzorem:

$$\hat{\mathbf{M}}_n = \mathbf{F} \mathbf{M}_n \mathbf{F}^T. \tag{4}$$

Parametry E_{z_n} mają interpretację początkowych modułów Younga n-tej rodziny włókien.

W tej pracy rozpatrujemy szczególny przypadek funkcji ESM, która odpowiada modelowi Ciarleta materiałów ściśliwych dyskutowanego w rozprawie [5]:

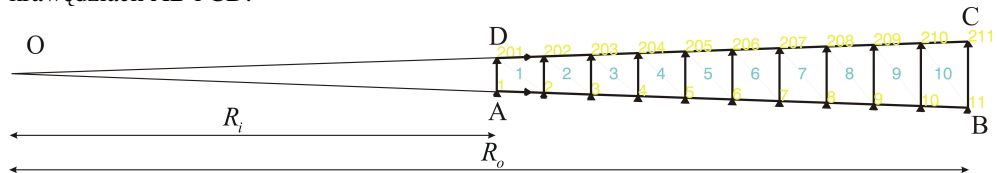
$$\begin{aligned} \Psi_M = & \frac{\mu_o}{2} [f(I_1 - 3) + (1-f)(I_2 - 3)] + \frac{1}{4} [\lambda_o - 2\mu_o(1-f)] J^2 + \\ & - \left[\frac{1}{2} \lambda_o + \mu_o \right] \ln J - \frac{1}{4} [\lambda_o - 2\mu_o(1-f)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Jeżeli $f = 1$, to z (5) otrzymujemy model Ogdena. Parametry: μ_o i λ_o są stałymi Lamé'go (identycznymi jak w teorii małych odkształceń). Funkcja (5) jest poliwywukłą i spełnia odpowiednie warunki wzrostu potencjału sprężystości wtedy i tylko wtedy gdy: $\mu_o > 0$, $f \in (0,1)$ i $\lambda_o > 2\mu_o(1-f)$, por. [5]. Ponieważ funkcja (2) jest funkcją kwadratową względem gradientu deformacji, to także funkcja (1) z uwzględnieniem (2) i (5) jest funkcją poliwywukłą. Wymaganie to zapewnia istnienie rozwiązań zadań brzegowych hipersprężystości dyskutowanych w pkt.3 pracy.

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

3.1 Inflacja kuli

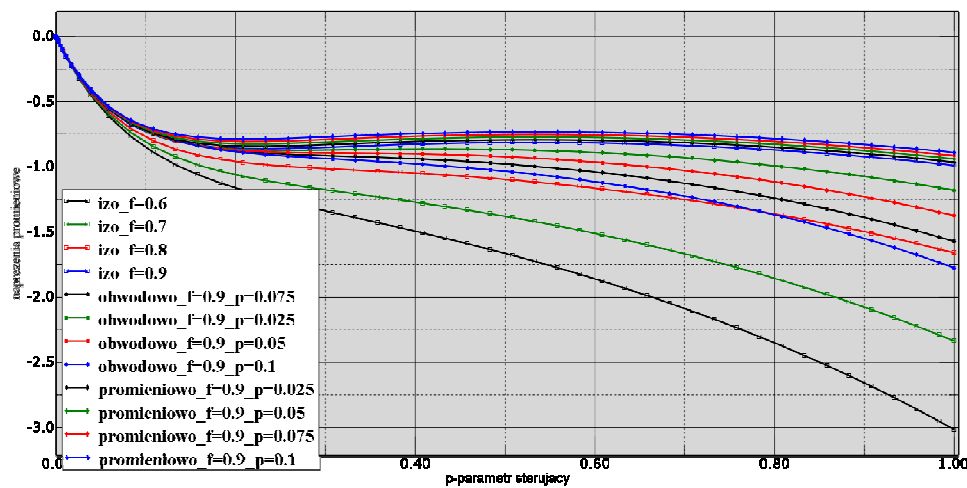
W celu rozwiązania zadania inflacji kuli przy zastosowaniu MES stworzono model uwzględniający jej symetrię względem punktu. Pozwala to na zredukowanie geometrii do siatki MES przedstawionej na rys.1 przy użyciu osiowo-symetrycznych elementów skończonych oraz odpowiednich przemieszczeniowych warunków brzegowych na krawędziach AB i CD.



Rys. 1. Schemat statyczny oraz siatka MES w symetrycznym względem punktu modelu kuli

Przyjęto promień wewnętrzny kuli $R_i = R$ oraz zewnętrzny $R_o = 2R$. Obciążenie zrealizowano poprzez wymuszenie przemieszczeniowe, zadając na krawędzi AD $u_r = 5R \cdot \hat{p}$, gdzie \hat{p} jest parametrem sterującym algorytmem iteracyjnym ($\hat{p} \in \langle 0, 1 \rangle$). Jednocześnie na krawędzi BC zadano zerowe przemieszczeniowe warunki brzegowe.

W modelu konstytutywnym (1-5) przyjęto następujące parametry materiałowe: $\mu = \mu_0$, $\lambda = 49\mu_0$ ($\nu_0 = 0.49$), $E_z = 2\mu_0$. Rozwiązując zadanie inflacji kuli badano wpływ pozostałych parametrów modelu, tj. f i p , umieszczając informację o ich wartości na rys.2. Zbrojenie w postaci włókien umieszczono w kierunku obwodowym i promieniowym. Zauważmy, że zjawisko inflacji sfery jest zauważalne także w przypadku materiału transwersalnie izotropowego.



Rys. 2. Wykresy naprężeń promieniowych w funkcji parametru sterującego w skrajnym elemencie wewnętrznym

3.2 Ekspansja cylindra grubościennego

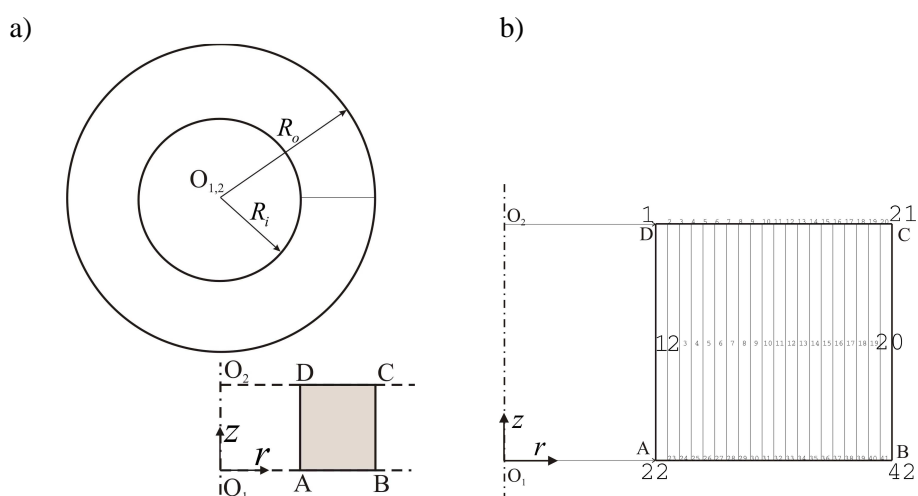
Zadanie dotyczy ekspansji (rozszerzenia) cylindra grubościennego wykonanego z materiału o relacjach konstytutywnych podanych w pkt.2. W zadaniu tym przyjęto przemieszczeniowe warunki brzegowe na wewnętrznej powierzchni cylindra i zerowe naprężeniowe warunki brzegowe na powierzchni zewnętrznej.

Promień wewnętrzny cylindra wynosi $R_i = 10R$, zaś promień zewnętrzny $R_o = 20R$.

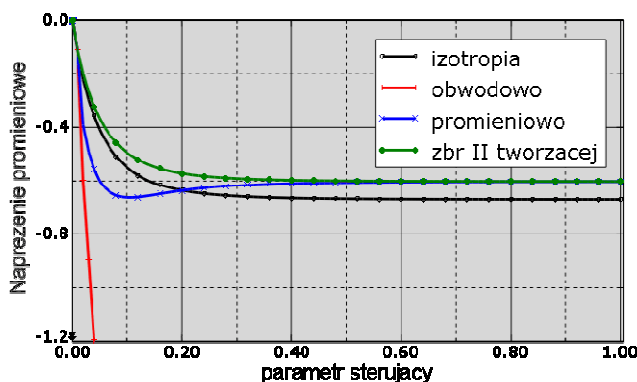
Zadanie jest osiowo symetryczne, zatem zgodnie ze schematem przedstawionym na rys.3, można modelować elementami osiowo-symetrycznymi (tu CAX4H) tylko obszar ABCD. Rozwiązanie tego zadania w układzie biegunowym jest zależne od jednej zmiennej geometrycznej. Wszystkie składowe stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia mogą być co najwyżej funkcjami zmiennej r . Wobec tego na jakość rozwiązania numerycznego ma wpływ wyłącznie liczba elementów w kierunku promienia. Na rys.3 przedstawiono siatkę składającą się z 20 elementów skończonych, która wykorzystana została do rozwiązania zadania z przemieszczeniowymi warunkami brzegowymi na

krawędziach AB i DC ($u_r=0$) oraz obciążeniem realizowanym przez przemieszczeniowe warunki brzegowe. W węzłach 1 i 22 zadano przemieszczenia w kierunku r o wartości $u_r=100 R \cdot \hat{p}$, gdzie \hat{p} jest parametrem sterującym algorytmem całkowania.

W modelu konstytutywnym przyjęto następujące parametry materiałowe: $\mu = \mu_0$, $\lambda = 49\mu_0$ ($\nu_0 = 0.49$), $E_z = 26\mu_0$, $f = 0.9$. Zbrojenie w postaci włókien podobnie jak w przypadku kuli także umieszczono w kierunku obwodowym i promieniowym, co jednak ze względu na inny sposób modelowania przestrzennego wymaga odmiennej definicji składowych tensora parametrycznego (4).



Rys. 3. Ekspansja cylindra grubościennego: a) schemat rozważanego zadania, b) siatka MES w konfiguracji aktualnej (zdeformowanej)

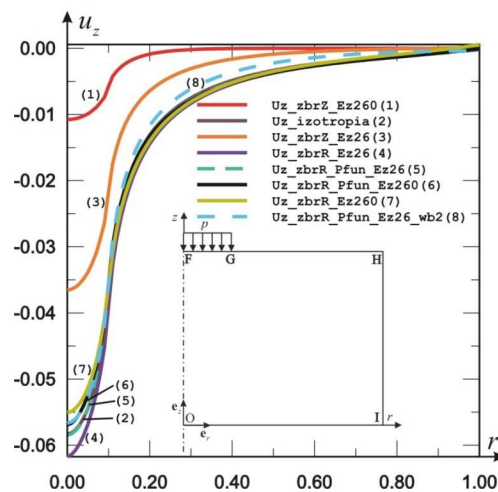


Rys. 4. Wykresy naprężeń promieniowych w funkcji parametru sterującego w skrajnym elemencie wewnętrznym

Wyniki pokazane na rys.4 wykazują wyraźnie, że zjawisko inflacji cylindra występuje przy jego zbrojeniu w kierunku promieniowym, natomiast zbrojenie obwodowe eliminuje to zjawisko. Zjawisko inflacji cylindra jest trudno obserwowalne, w porównaniu do analogicznego zjawiska dla sfery i balonu, oraz nie każdy hipersprężysty model materiału izotropowego to zjawisko przewiduje, co szczegółowo dyskutowano w Rozdziale 6 pracy [5]. Podobnie jest w przypadku rozpatrywanym w tej pracy, patrz rys.4.

3.3. Zadanie ściskania walca zbrojonego włóknami

Zadanie dotyczy ściskania walca w kierunku jego osi przez zadanie naprężeniowych warunków brzegowych na jego podstawach. Obciążenie w postaci ciśnienia o jednostkowej amplitudzie założono na kołowym podobszarze podstawy walca, którego środek pokrywa się z osią walca. Dodatkowo, na pozostałych częściach podstaw walca oraz na jego poboczniczy założono zerowe naprężeniowe warunki brzegowe. Przyjęto, że walec wykonany jest z hipersprężystego materiału zbrojonego włóknami (1-5). Rozważane są trzy przypadki, tj. brak zbrojenia, włókna zbrojenia mają kierunek osi Oz oraz włókna zbrojenia mają kierunek osi Or . Należy zaznaczyć, że kierunki ułożenia włókien są podane w konfiguracji odniesienia, a w wyniku deformacji zmieniają się lokalnie zgodnie z (4). Powyższe założenia w odniesieniu do geometrii, warunków brzegowych oraz sposobu zbrojenia włóknami, umożliwiają przyjęcie założenia o symetrii osiowej i symetrii względem płaszczyzny prostopadłej do osi z z położonej w połowie wysokości walca, por. schemat na rys.5.

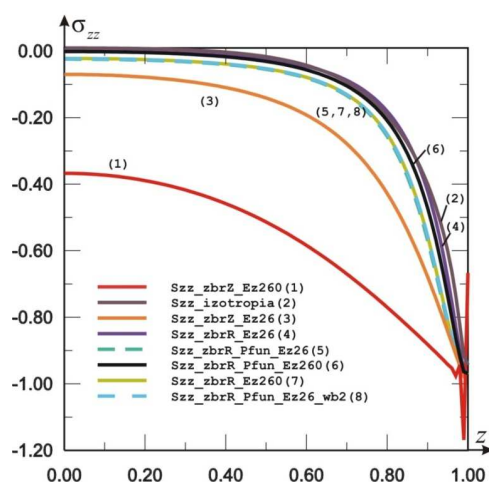


Rys.5. Schemat analizowanego zadania oraz przemieszczenie u_z krawędzi FH w funkcji promienia

W osiowo-symetrycznym modelu jak na rys.5. na brzegu FG przyjęto jednostkowe ciśnienie zaś na brzegach GH i IH zerowe naprężeniowe warunki brzegowe. Na części brzegu OI przyjęto $u_z=0$. Wymiary analizowanego obszaru (w wielkościach bezwymiarowych) wynoszą 1×1 , zaś stosunek długości brzegu FG do FH wynosi 0.1.

Obszar OFHI podzielono na 10000 elementów typu CAX4 o liniowych funkcjach kształtu. Przyjęta siatka MES jest równomierna, tj. odpowiednio w kierunku osi Oz jak i osi Or znajduje się po 100 elementów. W analizowanym przykładzie przyjęto następujące dane materiałowe: $p = 0.1$ (albo $p(r) = 0.1 \cdot r$), $\mu_0 = 1.0 E_M$, $\lambda_0 = 1.5 E_M$, $E_z = 26 E_M$ (albo $E_z = 260 E_M$), gdzie E_M jest początkowym modułem Younga materiału matrycy oraz $f = 0.2$.

Podstawowym celem tego przykładu jest porównanie rozwiązań zadania w przypadku hipersprężystego materiału izotropowego i zaimplementowanych modeli hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami. Zadanie rozwiązano, zakładając różne usytuowanie włókien zbrojenia: a) w kierunku osi Oz (oznaczenie na rysunkach „zbrZ”), b) w kierunku osi Or (oznaczenie na rysunkach „zbrR”), przy różnych stosunkach początkowych modułów Younga zbrojenia i matrycy: $E_z / E_M = 10$ (oznaczenie na rysunkach „Ez26”), $E_z / E_M = 100$ (oznaczenie na rysunkach „Ez260”), oraz w przypadku zbrojenia w kierunku osi Or przyjęto, że udział objętościowy zbrojenia zmienia się wraz z promieniem zgodnie z równaniem $p(r) = 0.1 \cdot r$ (oznaczenie na rysunkach „Pfun”). Dodatkowo w zadaniu ze zbrojeniem, o sztywności dziesięciokrotnie większej niż matryca ułożonym w kierunku osi Or , przeanalizowano wpływ typu warunków brzegowych na brzegu IH. Założono na brzegu IH przemieszczeniowe warunki brzegowe, tj. $u_r = 0$, zamiast zerowych naprężeniowych warunków brzegowych (oznaczenie na rysunkach „wb2”).



Rys.6. Składowa naprężenia σ_{zz} w funkcji zmiennej z na krawędzi OF

Zauważmy, że największy wpływ na wyniki zadania (zarówno jakościowe jak i liczbowe), w porównaniu do wyników zagadnienia z walcem jednorodnym, ma zbrojenie usytuowane zgodnie z osią walca.

4. WNIOSKI

Materiały kompozytowe powstałe przez zbrojenie włóknami izotropowej matrycy są obecnie powszechnie stosowane w technice ze względu na ich pożądane własności mechaniczne. Ponieważ funkcję osnowy, o znacznej ciągliwości, pełnią zwykle żywice syntetyczne (np. żywice epoksydowe lub poliestrowe), włókna zaś są najczęściej szklane, węglowe, borowe i organiczne, to w wielu zastosowaniach tych materiałów w elementach konstrukcyjnych konieczne jest uwzględnienie w modelach teoretycznych tych materiałów relacji konstytutywnych hipersprężystości. Pozwala to bowiem na prawidłowy, z punktu widzenia mechaniki kontinuum, opis nie tylko znacznej ciągliwości tych materiałów ale także i poprawny opis zjawisk globalnego i lokalnego wyboczenia elementów konstrukcyjnych, co ilustrowaliśmy m.in. w pracy [4]. Zaletą modelu teoretycznego stosowanego w tej pracy jest prostota wyznaczenia parametrów materiałowych relacji konstytutywnych. Nawet uproszczone modele anizotropowych materiałów hipersprężystych w postaci podanej w pkt.2 pracy prowadzą do jakościowo poprawnych wyników w zagadnieniach nieliniowych, co ilustrujemy w pkt.3 przykładami dotyczącymi zjawiska inflacji sfery i cylindra. Trzeci przykład numeryczny dotyczący ściskania walca jest o tyle istotny, że w zadaniu tym oprócz niejednorodności materiału wynikającego, ze zmiennej orientacji włókien w trakcie deformacji walca występuje także jego niejednorodność w konfiguracji nieodkształconej, która jest zadana funkcyjnie i zależy od stopnia zbrojenia matrycy. W tego typu zadaniu brzegowym, rozwiązanie numeryczne zadania nieliniowego w sposób istotny zależy od zastosowanej siatki MES i rodzaju elementu skończonego. Podejście tu zaproponowane jest ograniczone do elementów skończonych z liniowymi funkcjami kształtu w sformułowaniu przemieszczeniowym MES w zadaniach przestrzennych albo płaskiego stanu odkształcenia. Zarówno płaski stan naprężenia jak i zagadnienia nieściśliwych, anizotropowych materiałów hipersprężystych wymagają innego sformułowania modelu teoretycznego i jego implementacji w MES.

5. BIBLIOGRAFIA

- [1] ABAQUS *Theory manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [2] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 6.1., 2000, Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket.
- [3] Gajewski M., Jemioło S.: Implementacja MES modeli konstytutywnych hipersprężystych materiałów zbrojonych włóknami, XVI Slovak-Polish-Russian Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering, Žilina, str. 119-126, Moscow 2007.
- [4] Gajewski M., Jemioło S.: Model of hyperelastic fibre-reinforced material, TRANSCOMP – XIII, Proc. of International Conference Computer Systems Aided Science, Industry and Transport, Radom 2009.
- [5] Jemioło S.: *Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych. Modelowanie i implementacja numeryczna*, Prace Naukowe, Budownictwo z. 140, 2002, str. 1-308, OWPW.
- [6] Spencer A.J.M.: *Deformations of fibre-reinforced materials*, 1972, Oxford, Clarendon Press.