

Paweł SITEK
Jarosław WIKAREK

MODEL MATEMATYCZNY OPTYMALIZACJI ROZDZIAŁU PALET W CENTRUM DYSTRYBUCYJNYM

Problem optymalizacji rozdziału palet jest jednym z wielu problemów optymalizacyjnych pojawiających się we współcześnie funkcjonujących centrach dystrybucyjnych. Jest jednym z kluczowych problemów poza optymalizacją tras, optymalizacją rozmieszczenia zapasów w magazynach wysokiego składowania itp. Dodatkowo należy podkreślić, że problem optymalizacji rozdziału palet odbywa się w horyzoncie krótkookresowym np. raz na dobę. W artykule przedstawiony został model matematyczny optymalizacji oraz jego implementacja. Przedstawiono również rozwiązanie modelu dla przykładów liczbowych. Jako środowisko implementacji i rozwiązania modelu zaproponowano pakiet optymalizacji dyskretnej Lingo firmy LINDO.

THE OPTIMIZATION PROBLEM OF PALLETS ALLOCATION IN DISTRIBUTION CENTER

Problem of optimization of pallets allocation is one of many problem in modern distribution centers. However, it is very important problem excepting e.g. routing optimization, space optimization etc. Additionally, that problem optimization of pallets allocation for routes and trucks is a short-run horizon process e.g. every day. The optimization and implementation model of that problem has been presented in this paper. Solution of this model for the numerical examples has been describing also. As a solution environment package of discreet optimization Lingo has been used.

1. WPROWADZENIE

Współczesne przedsiębiorstwa przemysłowo-usługowe działają w szybko zmieniającym się otoczeniu o w ramach dużej globalnej konkurencji. Dlatego muszą posiadać zdolność do zarządzania na nieprzewidywalnych rynkach, do nadzoru nad geograficznie rozproszonymi zakładami produkcyjnymi oraz dążyć do zapewnienia wyjątkowych produktów i wysokiej jakości obsługi klienta [1].

W ostatnich latach wiele firm o zasięgu globalnym jak również małych i średnich przedsiębiorstw (MŚP), zdaje sobie sprawę, że skuteczność ich działań jest w dużym

stopniu zależna od odpowiedniej współpracy i koordynacji z ich dostawcami, jak również z odbiorcami czy bezpośrednio klientami końcowymi [2].

Ten rodzaj wzajemnych zależności i uwarunkowań jest znany w literaturze jako koncepcja zarządzania łańcuchem dostaw (*Supply Chain Management (SCM)*). Wprowadzenie SCM umożliwia synchronizację przepływu materiałów pomiędzy poszczególnymi kooperantami, co wyraźnie ułatwia firmie dostosowanie się do określonego popytu rynkowego. Wewnętrzne SCM obejmuje zagadnienia związane z zaopatrzeniem, produkcją i dystrybucją. Zewnętrzne SCM integruje przedsiębiorstwo z jego dostawcami i klientami.

W artykule przedstawiony zostanie problem szczegółowy dotyczący logistyki dystrybucji dla regionalnego centrum dystrybucji towarów FMCG (*Fast Moving Consumer Goods*).

2. LOGISTYKA DYSTRYBUCJI DLA CENTRÓW DYSTRYBUCYJNYCH

Centralizacja dystrybucji redukuje liczbę transakcji w porównaniu z liczbą transakcji w przypadku braku dystrybucji centralnej. Dostawca lub dostawcy nie muszą wysyłać przesyłek do wielu odbiorców, lecz wysyłają jedną do wydzielonego centrum dystrybucji. Podobnie odbiorca nie musi przyjmować wielu przesyłek od wielu nadawców, lecz odbiera przesyłkę zbiorczą z centrum dystrybucji. W każdym centrum dystrybucyjnym można wyróżnić trzy główne etapy procesu logistycznego:

- wejściowy – obejmująca planowanie i zamawianie dostawy, przyjmowanie dostawy i jej rozładowywanie
- wewnętrznego zarządzania produktem – polegający na relokacji otrzymanej dostawy w obrębie centrum dystrybucji
- wyjściowy – przyjmowanie zamówienia, organizowanie go i przygotowanie do transportu

Dzięki redukcji liczby transakcji pomiędzy dostawcami i odbiorcami uzyskuje się przede wszystkim bardzo istotne skrócenie przeciętnego czasu dostawy, ale także redukcję kosztów tych transakcji. Dodatkowym efektem jest możliwość optymalizowania środków transportu tak, aby były jak najlepiej wykorzystane np. optymalizacja tras, załadunku, przydziału palet do samochodów itp. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że wspomniane efekty uzyskuje się "kosztem" tego, co dzieje się wewnątrz centrum dystrybucji. Tam mianowicie trzeba zwieziony towar rozładować (np. z ciężarówek), czasem także rozpaletować, a następnie skompletować partie do wywozu i załadować je na środki transportu rozwożące towar do klientów. Znowu więc nie przy każdej wielkości partii i dowolnej różnorodności towarów zagadnienie optymalizacji kosztów jest oczywiste.

Generalnie należy stwierdzić, że centra dystrybucyjne zapewniają:

- polepszenie jakości i terminowości dostaw;
- zwiększenie dostępności produktów, co oznacza zarazem podniesienie poziomu obsługi klienta;
- lepszą kontrola procesu przepływu produktów w obrębie łańcucha dostaw;
- obniżenie kosztów.

3. PROBLEM ROZDZIAŁU PALET

Problem rozdziału palet jest jednym z kilku problemów występujących w centrach dystrybucyjnych wchodzących w zakres problematyki dotyczącej spedycji dla odbiorcy końcowego. W przykładowym centrum dystrybucyjnym proces rozdziału palet dla klienta końcowego rozpoczyna się od utworzenia przez Dział sprzedaży na podstawie zamówienia od klienta dokumentu magazynowego. Dokument magazynowy zawiera główne informacje o zamówieniu m.in. podział na palety. Na podstawie tych informacji magazynier dokonuje kompletacji palet. Kolejność w jakiej układają się poszczególne towary z dokumentu magazynowego na paletach jest optymalna względem trasy wózka. Następnie gotowe palety są gromadzone w części spedycyjnej magazynu. O przydziale palet do poszczególnych tras a następnie o sposobie załadunku palet na samochody decydują dyspozytorzy na podstawie doświadczenia. Jeśli sam sposób załadunku /kolejność/ palet do samochodu jest procesem deterministycznym bo zależy od trasy, to już przydział palet do tras i samochodów procesem takim nie jest.

4. MODEL MATEMATYCZNY PROBLEMU ROZDZIAŁU PALET

Model matematyczny problemu rozdziału palet został sformułowany w postaci zadania programowania liniowego całkowitoliczbowego[3][4]. Jako funkcje celu przyjęto koszt transportu, który w wyniku optymalizacji jest minimalizowany. Zmiennymi decyzyjnymi modelu (X_{jil}) są zmienne określające liczbę palet, które mają być dostarczone do danego punktu j poprzez rozwiązane trasą i i przez samochód l oraz ($Y_{i,l}$) liczba kursów samochodu l na trasie i . Funkcja celu posiada dwie składowe. Pierwsza określa koszt kursu na trasie i samochodu l i jest niezależna od liczby przewożonych palet. Druga zależy od liczby dostarczanych palet do danego punktu j trasą i i przez samochód l . Ograniczenia modelu matematycznego (1) .. (6) można interpretować następująco. Ograniczenie (1) zapewnia, że każde zapotrzebowanie zostanie pokryte, tzn. każde miasto/punkt otrzyma tyle palet towaru ile zamawiało. Ograniczenie (2) zapewnia realizowalność danego przewozu bowiem ogranicza ilościowo ładunek na dany samochód do jego możliwości (pojemności/ładowności) oraz liczby kursów. Kolejne ograniczenie (3) zapewnia nie przekraczanie liczby kursów dla danego typu samochodu. Ograniczenie (4) wymusza przydział samochodów do tych tras gdzie został już przydzielony ładunek w postaci określonej liczby palet, tzn. wartość zmiennej decyzyjnej X_{jil} jest różna od zera. Ograniczenie (6) zapewnia czasową realizowalność dostaw. Ograniczenie (5) określa całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych. Zaproponowany model uwzględnia również dynamiczną optymalizację tras. W tym celu wprowadzono miasta/punkty, które należą do poszczególnych tras oraz uzależniono zmienną decyzyjną określającą wielkość zapotrzebowania X_{jil} również od konkretnych punktów dostaw.

W tabeli I przedstawiono wszystkie dane modelu optymalizacyjnego oraz zmienne decyzyjne.

Tab. I Parametry oraz zmienne decyzyjne modelu matematycznego

Symbol	Opis
Indeksy używane w modelu	
j	indeks punktów dostaw
i	indeks tras
l	indeks typów samochodów
N	liczba miast
M	liczba tras doręczeń
O	liczba typów samochodów
Parametry modelu	
Z_j	zapotrzebowanie miasta j na palety ($j=1..N$).
D_{ji}	$\begin{cases} 1 & \text{jeśli miasto } j \text{ należy do trasy } i \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$ dla ($j=1..N$), ($i=1..M$)
K_l	pojemność samochodu typu l (w paletach) ($l=1..O$)
U_l	dopuszczalna liczba kursów samochodów typu l ($l=1..O$).
W_l	dopuszczalny czas kursów samochodów typu l ($l=1..O$).
C_{li}	koszt wysłania samochodu typu l ($l=1..O$) na trasę i ($i=1..M$)
E_{li}	czas kursu samochodu typu l ($l=1..O$) na trasę i ($i=1..M$)
$B_{j,i,l}$	koszt obsługi miasta j ($j=1..N$) na trasie i ($i=1..M$) przez samochód typu l ($l=1..O$). (zmienny zależny od liczby palet).
Zmienne decyzyjne	
$X_{j,i,l}$	część zapotrzebowania na palety miasta j ($j=1..N$) realizowana na trasie i ($i=1..M$) obsługiwana przez ciężarówkę typu l ($l=1..O$)
$Y_{i,l}$	liczba kursów ciężarówki typu l ($l=1..O$) na trasie i ($i=1..M$)

Funkcja celu – minimalizacja kosztów transportu

$$\sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^O Y_{i,l} * C_{i,l} + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^O X_{j,i,l} * B_{j,i,l}$$

Ograniczenia

$$\sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^O X_{j,i,l} * D_{j,i} = Z_j \text{ dla } j=1..N \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M X_{j,i,l} \leq U_l * K_l \text{ dla } l=1..O \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M Y_{i,l} \leq U_l \text{ dla } l=1..O \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^N X_{i,j,l} \leq K_l * Y_{i,l} \text{ dla } i = 1..M, l = 1..O, \quad (4)$$

$$X_{i,j,l} \in C \text{ dla } j = 1..N, i = 1..M, l = 1..O, \quad (5)$$

$$Y_{i,l} \in C \text{ dla } i = 1..M, l = 1..O,$$

$$\sum_{i=1}^M E_{i,l} Y_{i,l} \leq W_l \text{ dla } l = 1..O \quad (6)$$

5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Do implementacji modelu wykorzystano środowisko programowania matematycznego Lingo firmy LINDO [5]. Pakiet Lingo umożliwia modelowanie i rozwiązywanie m.in. problemów liniowych, nieliniowych i całkowitoliczbowych. System Lingo posiada wbudowany język modelowania i programowania, za pomocą którego można implementować modele matematyczne. Zaimplementowany model zostaje rozwiązany za pomocą wbudowanych solverów (liniowego, całkowitoliczbowego, nieliniowego itd.) [5]. W celu ułatwienia implementacji kolejnych modeli decyzyjnych oraz automatyzacji tego procesu zostały podjęte prace nad uniwersalną platformą programową opartą na relacyjnej bazie danych. Założenia systemu wspomagania decyzji opartego na tej platformie przedstawiono w [6].

Po dokonaniu implementacji modelu (1) .. (5) przeprowadzono eksperymenty obliczeniowe tzn. rozwiązywano problem dla wielu zbiorów danych liczbowych. W tab.II przedstawione zbiory danych (fragmenty tabel) dla których dokonano obliczeń. Eksperymenty przeprowadzono dla dwóch typów samochodów (pojemności 12 i 24 palet). Poszczególne przykłady od P1 do P4 różnią się wartościami parametrów W i U. parametr W określa dopuszczalny czas w którym muszą być zrealizowane kursy dla danego typu samochodu. Z jednej strony parametr ten związany jest z warunkami eksploatacji samochodów a z drugiej nieprzekraczalnymi terminami realizacji dostaw. Natomiast parametr U określa liczbę kursów dla danego typu samochodu co związane jest z liczbą samochodów, kierowców itp. Przeprowadzone eksperymenty umożliwiają odpowiedź między innymi na następujące pytania:

- Jaki jest optymalny koszt realizacji zamówień?
- Czy jest możliwa realizacja dostaw przy posiadanych zasobach w zadanym czasie?
- Jak wyglądają trasy dostaw odpowiadające optymalnym kosztom?
- Ile i jakimi trasami przewidzianych jest kursów danego typu samochodu w celu realizacji dostaw przy optymalnym koszcie?
- Jakie jest zapotrzebowanie na samochody i kierowców?

Tab. II Fragmety tabel z danymi liczbowymi do eksperymentów obliczeniowych

Zamówienia	
j	Z
1	12
2	8
3	12
4	6
5	5
6	8
7	12
8	6

Trasy			
j	i	j	i
1	1	5	3
1	2	5	4
1	3	5	5
2	1	6	1
2	2	6	3
2	4	6	5
3	1	7	2
3	2	7	3
3	4	7	4
4	3	8	1
4	4	8	2
4	5	8	3

Koszty stałe			
i	l	C	E
1	1	10	5
1	2	8	5
2	1	12	6
2	2	10	6
3	1	14	8
3	2	12	8
4	1	10	6
4	2	8	6
5	1	6	6
5	2	5	6

Typy samochodów			
l	K	U	W
Przykład1 (P1)			
1	24	4	20
2	12	4	20
Przykład2 (P2)			
1	24	2	20
2	12	2	20
Przykład3 (P3)			
1	24	4	12
2	12	4	12
Przykład4 (P4)			
1	24	2	12
2	12	2	12
Przykład5 (P5)			
1	24	4	10
2	12	4	10

Koszt zmienne															
j	i	l	B	j	i	l	B	j	i	l	B	j	i	l	B
1	1	1	10	3	1	1	6	5	3	1	6	7	2	1	8
1	1	2	6	3	1	2	5	5	3	2	4	7	2	2	6
1	2	1	10	3	2	1	6	5	4	1	6	7	3	1	8
1	2	2	6	3	2	2	5	5	4	2	4	7	3	2	6
1	3	1	10	3	4	1	6	5	5	1	6	7	4	1	8
1	3	2	6	3	4	2	5	5	5	2	4	7	4	2	6
2	1	1	8	4	3	1	5	6	1	1	5	8	1	1	10
2	1	2	5	4	3	2	5	6	1	2	4	8	1	2	8
2	2	1	8	4	4	1	6	6	3	1	6	8	2	1	10
2	2	2	5	4	4	2	6	6	3	2	4	8	2	2	8
2	4	1	8	4	5	1	5	6	5	1	6	8	3	1	10
2	4	2	5	4	5	2	5	6	5	2	4	8	3	2	8

Tab.III Fragmenty tabel z wynikami eksperymentów obliczeniowych

Wyniki (zmienna X)															
i	j	l	X	i	j	l	X	i	j	l	X	i	j	l	X
P 1 fc= 448				P 2 fc= 472				P3 fc= 474				P4 fc= 474			
1	1	2	12	1	1	2	12	1	1	2	12	1	1	2	12
2	1	2	8	2	4	2	8	2	4	2	8	2	1	2	8
3	1	1	12	3	1	1	12	3	1	1	7	3	1	1	11
4	5	1	6	4	3	1	6	3	4	1	5	3	4	1	1
5	5	1	5	5	3	1	1	4	4	1	6	4	4	1	6
6	1	1	8	5	4	2	4	5	4	1	1	5	4	1	5
7	4	2	12	6	1	1	8	5	4	2	4	6	1	1	8
8	1	1	2	7	3	1	12	6	1	1	8	7	4	1	12
8	1	2	4	8	1	1	1	7	4	1	12	8	1	1	2

Wyniki (zmienna Y)											
i	l	Y	i	l	Y	i	l	Y	i	l	Y
P1			P2			P3			P4		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	1	2	1	1	2	1	1	2	2
4	2	1	3	1	1	4	1	1	4	1	1
5	1	1	4	2	1	4	2	1			

Przykład P5 brak rozwiązania.

6. WNIOSKI

Zaproponowany model optymalizacyjny jest kompletny i wpisuje się w problematykę zagadnień optymalizacji w centrum dystrybucyjnym. Oczywiście jest on jedynie rozwiązaniem pewnego szczegółowego problemu dotyczącego spedycji. W analizowanym centrum dystrybucyjnym występuje wiele problemów, które można optymalizować. Jednak codzienna konieczność podejmowania decyzji dotyczących rozdziału palet i ich transportu do klienta wysuwa optymalizację kosztów podejmowania tych decyzji na pierwszy plan. Przedstawiony model może posłużyć również to pewnych symulacji kosztów przy założeniu różnych strategii spedycji, np. użycia większej bądź mniejszej liczby samochodów, zwiększenia różnorodności typów samochodów itp. Dalsze prace przewidują rozbudowę modelu o dalsze czynności związane ze spedycją czyli m.in. optymalizację tras wewnątrz centrum dystrybucyjnego, optymalizację samego procesu załadunku itp.

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] S. Terzi and S. Cavalieri, “*Simulation in the Supply Chain*” Context: A Survey,” *Computers in Industry*, vol. 53, no. 1, pp. 3–16, January 2004.
- [2] R. Hieber, “*Supply Chain Management*”: *A Collaborative Performance Measurement Approach*, Zurich, VDF, 2002.
- [3] S.P. Bradley, A.C. Hax, T. L. Magnanti *Applied Mathematical Programming* Addison-Wesley Pub. Co. (Reading, Mass.), 1977.
- [4] M.M. Sysło, M. Deo, J.S. Kowalik *Algorytmy optymalizacji dyskretnej z programami w języku PASCAL* PWN, 1993.
- [5] www.lindo.com
- [6] P.Sitek, J.Wikarek, *Podstawowe struktury systemu wspomaganie decyzji dla centrum dystrybucji*, Transcomp 2010 (w druku).