

Stanisław Krzyżaniak
Instytut Logistyki i Magazynowania

Krótką powtórka z klasycznej teorii zapasów

Niniejszy artykuł stanowi syntezę najważniejszych zagadnień związanych z zarządzaniem zapasami utrzymywanymi na pokrycie tzw. zapotrzebowania niezależnego. Charakteryzuje się ono nie tylko wzajemną niezależnością popytu na poszczególne, utrzymywane w zapasie pozycje asortymentowe, ale co istotniejsze, odznacza się często dużą zmiennością o naturze losowej, niepoddającej się analizom prognostycznym. Problemy te są na ogół właściwe dla tzw. punktów rozdzielających w łańcuchu logistycznym stanowiących główny punkt utrzymywania zapasu. W zależności od charakteru branży, ale także i rynku lub nawet konkretnego produktu mogą to być zapasy towarów w sieciach dystrybucji, zapasy towarów w magazynie centralnym, zapasy materiałów i podzespołów do montażu, zapasy materiałów i surowców do produkcji utrzymywane u producenta lub u jego dostawcy [1].

Kluczowym zagadnieniem jest tu określenie właściwego poziomu tzw. zapasu zabezpieczającego, zapewniającego ciągłość wydań w przypadku wystąpienia zwiększonego popytu w trakcie trwania cyklu uzupełnienia zapasu. To zaś z kolei może być skutkiem nie tylko wzrostu popytu generowanego przez odbiorców w przyjętej jednostce czasu, ale także wydłużaniem się czasu trwania tego cyklu. Innymi słowy, zapas zabezpieczający pomaga przeciwdziałać zwiększonemu popytowi rynkowemu i opóźnieniom dostaw. Zasady obliczania wymaganego poziomu zapasu zabezpieczającego przy różnych modelach (sposobach) uzupełniania zapasu, a także elementarne metody optymalizacji poziomu zapasu rotującego są przedmiotem klasycznej teorii zapasów. Mimo ciągłego rozwoju nowych koncepcji i rozwiązań organizacyjnych nakierowanych na obniżanie zapasów, jej fundamentalne zależności są nadal powszechnie stosowane, a podstawowe

formuły są udostępniane w nowoczesnych systemach informatycznych – zarówno tych specjalizowanych – dedykowanych głównie problemom zarządzania zapasami i magazynami, jak i dużych, zintegrowanych systemów wspomagających zarządzanie całymi przedsiębiorstwami.

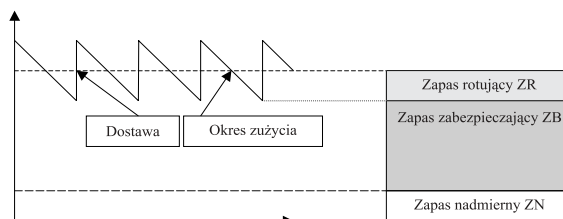
Ocena zapasów w przedsiębiorstwach jest bardzo często ograniczana do wyznaczania i kontrolowania wskaźnika ich rotacji. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że zgodnie z definicją wskaźnik rotacji określa „ile razy” zapas obróci się w określonym okresie (najczęściej miesiącu, kwartale lub roku) i jest wyrażany w „razach”. Popularne określanie rotacji „w dniach” dotyczy tzw. wskaźnika pokrycia popytu zapasem. Przykładowo, jeśli średni zapas wynosi 1000 jednostek, a sprzedaż (zużycie) miesięczna jest równa 2000 jednostek danego towaru (materiału), to miesięczna rotacja jest równa 2, a roczna 24. Natomiast pokrycie potrzeb zapasem wynosi 2 tygodnie.

Rotacja zapasu jest z pewnością bardzo ważnym wskaźnikiem, szczególnie z punktu widzenia skutków finansowych, wskazuje bowiem – między innymi – na szybkość obrotu kapitału zwią-

dokonać się kosztem zapasu rotującego lub zabezpieczającego, co również może mieć negatywny wpływ na poziom obsługi. Warto tu także zaznaczyć, że wskaźnik pokrycia potrzeb zapasem powinien się odnosić nie do wcześniej rejestrowanej sprzedaży (dane historyczne), ale do przewidywanych, przyszłych potrzeb wynikających z prognozowanego popytu. Zatem obok wskaźników charakteryzujących obrót zapasu (współczynnik rotacji lub pokrycia), konieczne jest także identyfikowanie i właściwe kształtowanie struktury ilościowej (wartościowej) zapasu. Struktura ta w najprostszym ujęciu dzieli zapas na część rotującą i nierotującą.

Część rotująca (obrotowa) to zapas związany z dostawami pod bieżące potrzeby (pokrycie przewidywanego, bieżącego popytu) oraz systematycznym zużyciem (obsługą tego popytu poprzez wydania lub sprzedaż). Zapas ten jest odnawiany według określonych zasad. Typowe z nich zostaną omówione poniżej. **Część nierotująca** stanowi zazwyczaj w założeniu zapas zabezpieczający, ale często tylko jego część stanowi uzasadnione ustaloną poziomem obsługi zabezpieczenie ciągłości wydań. Z różnych przyczyn część nierotująca obejmuje niestety również często zapas nadmierny, dodający koszty (głównie koszty zmienne utrzymania zapasu), a nie wnoszący żadnej wartości dodanej do całego procesu. Oczywiście nie rotowanie zapasu rozumiemy w kategoriach ewidencyjnych (ilość, wartość), a nie fizycznych. Fizycznie zapas musi bowiem „przepływać” równomiernie przez magazyn, choćby z zachowaniem zasady „pierwsze weszło – pierwsze wyszło” (*First In – First Out – FIFO*).

Zatem każdy zapas, którego utrzymywanie jest w ogóle uzasadnione (ale z taką sytuacją spotykamy się zazwyczaj w przypadku zapotrzebowania niezależnego) może składać się z trzech części: zapasu rotującego, zapasu zabezpieczającego i zapasu nadmiernego (rys. 1).



Rys. 1. Typowa struktura ilościowa (wartościowa) zapasu

zanego zapasami jednak dla logistyka nie jest to informacja wystarczająca. Zwiększenie rotacji, co jest ogólnie rzecz biorąc zjawiskiem korzystnym, może bowiem wynikać albo ze zwiększonej sprzedaży albo ze zmniejszenia zapasu. Zwiększenie sprzedaży (przy niezmienionym poziomie zapasu) może grozić zmniejszeniem poziomu obsługi, natomiast zmniejszenie zapasu może

Zapas rotujący

Poziom zapasu rotującego wynika wprost z wielkości dostaw i okresowego zużycia. Przyjmuje się, że jest on równy połowie średniej wielkości dostaw w rozpatrywanym okresie (uzasadnia to także rys. 1):

$$ZR = 0,5 \cdot WD_{sr}$$

Wielkość dostaw może być wyznaczana przy pomocy różnych metod, takich jak na przykład:

- metoda stałej wielkości partii (*fixed order quantity*)
- metoda ekonomicznej wielkości zamówienia (partii/dostawy) – EWZ (*economic order quantity*)
- metoda „partia na partię” (*lot for lot*)
- metoda partii pokrywającej stały okres (*fixed period requirement*)
- metoda stałego rytmu uruchomień/dostaw (*period order quantity*)
- metoda partii o najniższym koszcie jednostkowym (*least unit cost*)
- metoda partii o najniższym koszcie całkowitym (*least total cost*).

Tutaj przypomnimy jedną z najpopularniejszych, jaką jest metoda oparta na wyznaczaniu ekonomicznej wielkości zamówienia EWZ. Jej przyjęcie oznacza minimalizację łącznego kosztu uzupełniania i utrzymania zapasu. Wielkość tę wyznacza się z zależności, zwanej – od nazwisk jej twórców – wzorem Wilsona lub Harissa:

$$EWD+ = \sqrt{\frac{2 * PP * k_u}{k_m}} = \sqrt{\frac{2 * PP * k_u}{C * u_o}} \quad (1)$$

gdzie:

PP jest planowanym (prognozowanym) popytem w przyjętym okresie czasu (najczęściej jednego roku)

k_u jest kosztem związanym z przygotowaniem i obsługą jednego zamówienia i wynikającej z niego dostawy (koszt ten przemnożony przez liczbę dostaw jest zmiennym kosztem procesu uzupełniania zapasu w przyjętym okresie)

k_m to koszt utrzymania jednostki zapasu w przyjętym okresie; przyjmuje się, że stanowi on pewien ułamek wartości zapasu, więc np. ceny zakupu jednostki zapasu $C : k_m = C * u_o$ (u_o jest okresowym – np. rocznym – współczynnikiem kosztu utrzymania zapasu).

Klasyczny wzór Wilsona-Harrisa może podlegać szeregowi modyfikacji, związanych z uwzględnieniem na przykład:

- zmienności ceny zakupu C , uzależnionej od wielkości zamówienia (system cen rabatowych, obowiązujących przy większych zakupach): $C=f(WZ)$
 - zmienności kosztu k_u , zależnego od wielkości zamówienia, wynikająca na przykład ze zróżnicowanych kosztów transportu: $k_u=f(WZ)$
 - oczekiwanej wartości kosztu braku zapasu, powiększającej koszt k_u .
- Należy zaznaczyć, że bardzo często rzeczywiste wielkości zamówienia różnią się od obliczonych, optymalnych wartości. Wynikać to może na przykład z ograniczeń narzuconych przez dostawcę (minimalna wielkość dostawy) lub innych warunków technicznych, jak choćby wynikających z ładowności pojazdów stosowanych do transportu dostaw.

Zapas zabezpieczający

Ustalenie wymaganego poziomu zapasu zabezpieczającego z jednej strony wymaga znajomości zmienności popytu obserwowanej w czasie trwania cyklu uzupełnienia zapasu, a z drugiej określenia wymaganego poziomu obsługi.

Cykl uzupełnienia zapasu obejmuje procesy realizowane zarówno po stronie dostawcy jak i zamawiającego, i trwa od chwili wystąpienia potrzeby odnowienia zapasu (może to być np. obniżenie poziomu zapasu dostępnego poniżej tzw. poziomu informacyjnego) do chwili udostępnienia zapasu do wykorzystania (sprzedaży lub zużycia). Czas trwania cyklu uzupełnienia zapasu jest zawsze dłuższy od czasu realizacji zamówienia, który obejmuje czynności leżące po stronie dostawcy. Trzeba o tym pamiętać przy wprowadzaniu niezbędnych danych do systemów informatycznych. Złożoność cykli uzupełnienia zapasu jest też przyczyną zmienności czasu ich trwania, a to – obok zmienności popytu – jest drugą ważną przyczyną występowania zmienności popytu w czasie trwania cyklu uzupełnienia zapasu.

W praktyce ta zmienność jest wyrażana odchyleniem standardowym popytu od wartości średniej (w ogólnym przypadku może to być błąd standardowy

prognozy) w cyklu uzupełnienia zapasu σ_{PT} . Wyznaczanie tej zmienności zależy m.in. od typu rozkładu statystycznego, za pomocą którego można opisać obserwowany rozkład częstości występowania poszczególnych wartości popytu. Do najczęściej stosowanych rozkładów należą: rozkład wykładniczy i Poissona (oba zalecane dla materiałów/towarów wolno rotujących) oraz rozkład normalny, przydatny w przypadku pozycji szybko rotujących, o relatywnie dużym wolumenie zużycia. Przykłady takich rozkładów wraz z dopasowaniem z odpowiednimi rozkładami teoretycznymi pokazano na rysunku 2. Poniżej ograniczymy się do rozważań dotyczących wyłącznie rozkładu normalnego.

Przyjmując, że rozkład częstości występowania różnych wartości czasu cyklu uzupełnienia zapasu jest także zgodny z rozkładem normalnym, szukane odchylenie standardowe popytu w cyklu uzupełnienia zapasu można wyznaczyć ze wzoru:

$$\sigma_{PT} = \sqrt{\sigma_P^2 * T + \sigma_T^2 * P^2} \quad (2)$$

gdzie:

P, σ_P – średni popyt i jego odchylenie standardowe w przyjętej jednostce czasu,

T, σ_T – średni czas trwania cyklu uzupełnienia zapasu i jego odchylenie standardowe (wyrażone w jednostkach czasu, zgodnych z tą dla której określono P i σ_P).

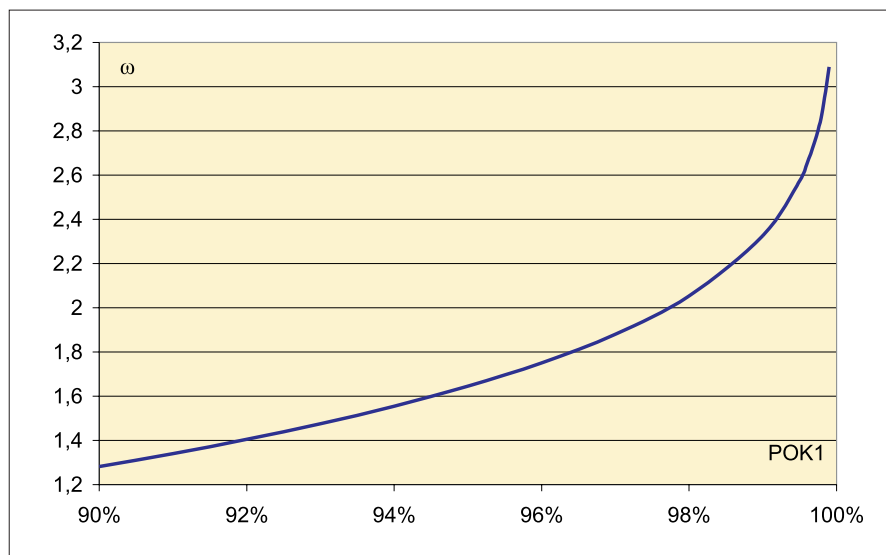
Zapas zabezpieczający obliczamy z zależności:

$$ZB = \omega * \sigma_{PT}, \quad (3)$$

gdzie ω stanowi współczynnik bezpieczeństwa, który ściśle wiąże się z poziomem obsługi, określanym jako prawdopodobieństwo nie wyczerpania zapasu w czasie trwania cyklu uzupełnienia zapasu. Ujęcie poziomu obsługi jako prawdopodobieństwo nie wystąpienia braku zapasu (będziemy dalej określać go jako POK1) jest jednym z dwóch sposobów jego definiowania. Druga definicja (POK2) odnosi się do procentowo wyrażonego stopnia realizacji zamówień. Ze względu na duże znaczenie jakie ma umiejętność rozróżniania obu definicji, poświęcono temu zagadnieniu osobny artykuł („Poziom obsługi w gospodarce zapasami”). Tutaj

ograniczmy rozważania do definicji probabilistycznej, a więc POK1. Zależność $\omega=f(\text{POK1})$ pokazano na rysunku 3. W arkuszu kalkulacyjnym EXCEL funkcja ta ma postać:

$$\omega = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW}(\text{POK1}) \quad (4)$$



Rys. 3. Graficzna prezentacja zależności $\omega=f(\text{POK1})$

Uzupełnianie zapasu w systemie opartym na poziomie informacyjnym

Przedstawione wyżej zależności i formuły stanowią podstawę wyznaczania parametrów systemu uzupełniania zapasów opartego na tzw. poziomie informacyjnym, zwanym też poziomem ponownego zamówienia (*reorder-level*).

Podstawowy, klasyczny model systemu zamawiania opartego na poziomie informacyjnym jest realizowany w oparciu o następujące założenia i warunki:

- dostawca akceptuje złożenie zamówienia w dowolnym momencie
- w każdej chwili, w praktyce po każdej transakcji magazynowej (przyjęcie lub wydanie), znany jest stan tzw. zapasu wolnego (dysponowanego) ZW. Dzisiejsze, najczęściej z informatyzowane systemy wspomagające gospodarkę materiałową i magazynową, w swojej warstwie ewidencyjnej gwarantują pełną dostępność do tej informacji, w praktyce wystarczy jednak wiedzieć tylko czy wolny zapas jest większy czy mniejszy od ustalonego poziomu informacyjnego

- zamówienie zostaje złożone wtedy, gdy po kolejnym wydaniu dobra materialnego, stan jego zapasu dysponowanego jest niższy od poziomu informacyjnego (ZI)
- w klasycznym modelu zamówienia składane są w stałej wielkości (WD), np. zgodnie z obliczoną ekonomicz-

Rysunek 4 przedstawia w ogólny sposób przebieg procesu odnawiania zapasu w systemie opartym na poziomie informacyjnym.

Podstawowy parametr w tym systemie – poziom informacyjny zapasu ZI oblicza się z formuły:

$$\text{ZI} = P * T + \omega * \sigma_{PT} \quad (5)$$

Obejmuje on zatem zapas pokrywający przeciętny (oczekiwany) popyt w cyklu uzupełnienia zapasu $T (P * T)$ oraz część zabezpieczającą zapasu $\omega * \sigma_{PT}$ – patrz wzór (3).

Przykład 1

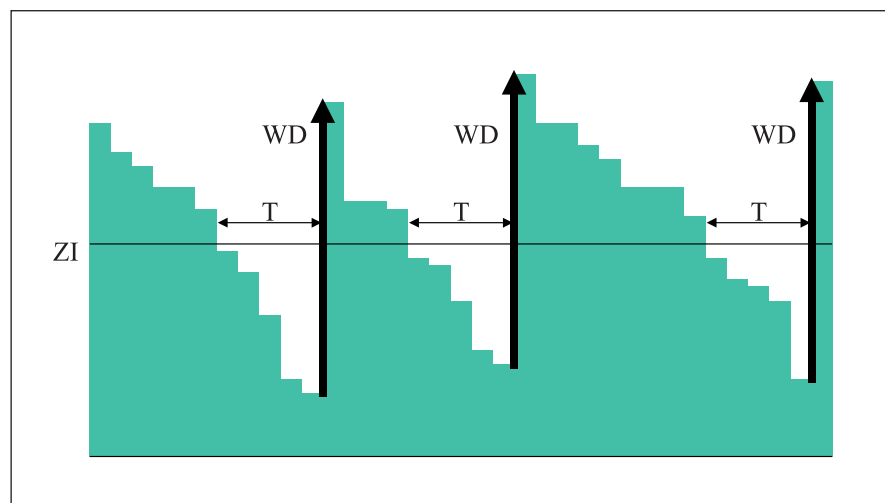
Przeciętny tygodniowy popyt na pewien artykuł wynosi 1650 sztuk ($P = 1650$) przy odchyleniu standardowym 350 sztuk ($\sigma_p=350$). Czas cyklu uzupełnienia zapasu wynosi 2 tygodnie ($T = 2$) i nie obserwuje się odchylenia od tej wartości ($\sigma_T=0$). Koszt obsługi jednego zamówienia i związanej z nim dostawy wynosi 340 zł ($k_u=340$). Cena zakupu $C = 4$ zł. Współczynnik rocznego kosztu utrzymania zapasu wynosi 20% ($u_o=0,2$).

Wyznaczyć parametry realizacyjne systemu zamawiania opartego na poziomie informacyjnym zapewniające minimalny łączny koszt uzupełniania i utrzymywania zapasu cyklicznego (rotującego) oraz występowanie braku w zapasie nie częściej niż raz na 2 lata. Ile będzie wynosił średni zapas tego artykułu?

Najpierw obliczamy wielkość dostaw determinującą przeciętny zapas rotujący. Podane kryteria optymalizacji wskazują na zastosowanie formuły na eko-

nomią wielkością zamówienia (patrz wzór (1), w praktyce może być zmienna, zależna od rzeczywistej wielkości zapasu w momencie składania zamówienia.

Zapasy dysponowane obliczany jest w oparciu o aktualny stan magazynowy, powiększany o zamówienia już złożone i pomniejszany o wszelkie dyspozycje i rezerwacje zapasu. Przestrzeganie tej zasady jego obliczania jest ważne dla prawidłowego uzupełnienia zapasu.



Rys. 4. Ilustracja odnawiania zapasu w systemie opartym na poziomie informacyjnym

nomiczną wielkość zamówienia. Skorzystamy ze wzoru (1) podstawiając podane wyżej wartości k_u , C oraz u_0 . Planowany roczny popyt wyliczamy jako $PP = P * 52 = 85\ 800$ sztuk (52 tygodnie w roku). Otrzymamy $EWZ = 8540$ sztuk. Oznacza to, że jeśli w praktyce będzie możliwe składanie zamówień w tej właśnie ilości, to przeciętny zapas rotujący będzie wynosił $ZR = 0,5 * WZ = 4270$ sztuk.

Wyznamy teraz zapas zabezpieczający. Najpierw jednak „przełożymy” opisową charakterystykę poziomu obsługi na liczbę. Łatwo można sprawdzić, że przy $PP=85\ 800$ sztuk oraz $EWZ = 8540$ sztuk, średnia roczna liczba dostaw wynosi 10. Przedstawiony warunek (występowanie braku zapasu nie częściej niż raz na 2 lata) oznacza, że brak zapasu nie powinien wystąpić częściej niż raz na 20 dostaw (20 cykli uzupełniania zapasu). Zatem ryzyko wystąpienia braku dla pojedynczego cyklu powinno być równe $1/20$, czyli 0,05. Oznacza to, że prawdopodobieństwo nie wystąpienia braku w pojedynczej dostawie musi być równe co najmniej 0,95, czyli $POK1=95\%$. Ze wzoru (4) znajdziemy:

$$\omega = \text{ROZKŁAD.NORMALNY.S.ODW}(0,95) = 1,64.$$

Zapasz zabezpieczający wyniesie (wzory 2, 3 i 5):

$$ZB = \omega * \sqrt{\sigma_P^2 * T + \sigma_T^2 * P^2} = 1,64 * 350 * \sqrt{2} = 812 \text{ sztuk.}$$

Zapasz informacyjny wynosi zatem

$$ZI = 1650 * + 812 = 4112 \text{ sztuk.}$$

Realizacja systemu zamawiania spełniającego postawione warunki będzie polegała na składaniu zamówień w ilości 8540 sztuk, gdy tylko dysponowany zapas stanie się mniejszy od poziomu $ZI=4112$ sztuk. Całkowity zapas średni będzie wynosił $ZC = ZR + ZB = 4270 + 812 = 5082$ sztuki. Łatwo obliczyć, że zapas ten pokrywa ok. 3 tygodniowy popyt. Zatem rocznie zapas będzie rotował ok. 17 razy.

Uzupełnianie zapasu w systemie opartym na przeglądzie okresowym

Drugim z podstawowych modeli odnawiania zapasu jest system zamawiania oparty na przeglądzie okresowym. Jego zasadniczą cechą jest to, że zamówienie jest składane w określonym cyklu o stałym okresie T_0 , przy czym wielkość zamówienia, a zatem i dostawy jest zmienna i jest wyznaczana jako różnica pomiędzy pewnym, określonym poziomem zapasu, zwanym zapasem maksymalnym ($ZMax$), a aktualnym zapasem dysponowanym (wolnym). System ten, zarówno w przedstawionym tu wariantie klasycznym, jak i w pewnych odmianach, znajduje zastosowanie, np. w realizacji dostaw do punktów sieci dystrybucyjnej (oddziałów terenowych firmy), a także dostaw niektórych towarów do sklepów detalicznych.

Klasyczny model systemu zamawiania opartego na przeglądzie okresowym jest realizowany przy następujących założeniach i warunkach:

– przegląd zapasu jest przeprowadza-

ny w stałym, z góry określonym cyklu; przeprowadzenie przeglądu jest równoznaczne ze złożeniem zamówienia

– w trakcie przeglądu ustala się poziom zapasu dysponowanego (wolnego) ZW

– w klasycznym modelu zamówienie zostaje złożone w wielkości równej $ZMax - ZW$, w praktyce może być to także wartość stała, wynikająca na przykład z ustaleń z dostawcą

– dostawa, zgodna z zamówieniem, przychodzi po ustalonym czasie T .

Rysunek 5 przedstawia w ogólny sposób przebieg procesu odnawiania zapasu w systemie opartym na przeglądzie okresowym.

Podstawowym parametrem dla systemu zamawiania opartym na przeglądzie okresowym jest, obok cyklu przeglądu T_0 , wartość zapasu maksymalnego $ZMax$. Nazwa tego parametru jest o tyle uzasadniona, że przy zachowaniu wszystkich reguł realizacji tego systemu zapas magazynowy nie będzie nigdy większy od wartości $ZMax$. Zapasz maksymalny, decydujący o wielkości zamówień, podobnie jak to ma miejsce w przypadku poziomu informacyjnego zapasu, może być wyznaczany intuicyjnie lub dostarczany w postaci wewnętrznych normatywów. I tu trzeba jednak pamiętać o znaczeniu zależności statystycznych rządzących zmiennym i niezależnym zapotrzebowaniem.

Obliczenia zapasu maksymalnego muszą uwzględniać zarówno średnie, oczekiwane zapotrzebowanie w cyklu uzupełnienia i cyklu przeglądu zapasu, jak i zapasz zabezpieczający, gwarantujący określony poziom obsługi.

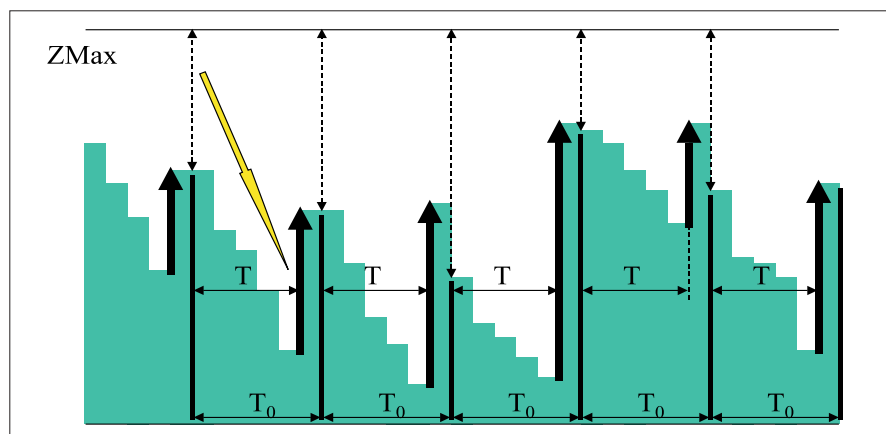
$$ZMax = P * (T + T_0) + ZB \quad (6)$$

gdzie:

P – zapotrzebowanie (popyt) w przyjętej jednostce czasu (np. tydzień, dzień),
 T – czas cyklu uzupełnienia zapasu,
 T_0 – okres cyklu przeglądu zapasu,
 ZB – zapasz zabezpieczający.

Zapasz zabezpieczający oblicza się ze wzoru:

$$ZB = \omega * \sigma_{PT,T_0} = \omega * \sigma_P * \sqrt{T + T_0} \quad (7)$$



Rys. 5. Graficzna ilustracja przypadku stosowania systemu zamawiania opartego na przeglądzie okresowym

Zapas rotujący jest w tym systemie sterowany długością cyklu przeglądu zapasu T_0 . Wartość tego parametru, gwarantującą łączny minimalny koszt uzupełniania i utrzymania zapasu można obliczyć przez obliczenie ekonomicznej wielkości zamówienia.

W tym przypadku będzie to średnia wielkość zamówienia. Znając roczny prognozowany popyt PP można obliczyć ekonomiczną liczbę dostaw, a stąd ekonomiczny cykl przeglądu zapasów ET_0 . Jeśli czas T_0 jest wyrażony w tygodniach, to

$$ET_0 = \frac{52 * EWZ}{PP} \quad (8)$$

Przykład 2

Realizacja systemu przeglądu okresowego dla danych i warunków podanych

w przykładzie 1 powinna przebiegać przy następujących wartościach parametrów:

$ET_0 = 5,2$ tygodnia (w praktyce 5 tygodni). Średnia wielkość dostawy będzie w tej sytuacji wynosiła ok. 8210, a przeciętny zapas rotujący $ZR = 4105$ sztuk.

Zapas zabezpieczający powinien być równy:

$$\begin{aligned} ZB &= 1,64 * 350 * \sqrt{2 + 5} = \\ &= 1519 \text{ sztuk,} \end{aligned}$$

a zapas maksymalny:

$$\begin{aligned} ZMax &= 1650 * (2+5) + 1519 \\ &= 13\,069 \text{ sztuk.} \end{aligned}$$

Realizacja systemu zamawiania będzie w tym przypadku polegała na przeglądzie zapasu w cyklu 5 tygodniowym i składanie zamówienie w ilości równej różnicy poziomu maksymalnego (13 069 sztuk) i zapasu dysponowanego w chwili przeglądu.

Całkowity zapas średni będzie wynosił:

$$\begin{aligned} ZC &= ZR + ZB = 4105 + 1519 = \\ &= 5624 \text{ sztuki.} \end{aligned}$$

Zapas ten pokrywa popyt na ok. 3,4 tygodnia i rotuje ok. 15,2 razy w ciągu roku. Wskaźniki te są gorsze niż w przypadku stosowania systemu opartego na poziomie informacyjnym, ale ten wzrost zapasu jest kompensowany przez fakt, że zapasem wystarczy „zająć się” raz na 5 tygodni, co powinno oznaczać niższe koszty operacyjne.