

Stanisław Krzyżaniak  
Instytut Logistyki i Magazynowania.

## O błędach popełnianych przy wyznaczaniu ekonomicznej wielkości zamówienia<sup>1</sup>

Wcześniejsze artykuły z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami” publikowane przez autora w LOGISTYCE (5/2008, 6/2008, 1/2009, 2/2009, 6/2010 i 1/2011) odnoszą się do zagadnień związanych z kształtowaniem właściwego poziomu zapasu zabezpieczającego. Niniejszy artykuł jest poświęcony kwestii optymalizacji zapasu cyklicznego (rotującego) poprzez wyznaczenie tak zwanej ekonomicznej wielkości zamówienia. Klasyczna formuła służąca jej obliczaniu została przedstawiona niemal 100 lat temu<sup>2</sup>, ale mimo upływu czasu pozostaje jedną z ważniejszych w zarządzaniu przepływem materiałów. Nie zmienia tego fakt, że stosowanie tego wzoru obwarowane jest licznymi ograniczeniami, a od chwili przedstawienia powstało szereg jego modyfikacji [na przykład 4].

### Ekonomiczna wielkość zamówienia – ogólne założenia

Zastosowanie ekonomicznej wielkości zamówienia EWZ, (*ang.* EOQ – *economic order quantity*) pozwala na minimalizację łącznych kosztów zamawiania (odnawiania, uzupełniania zapasów) i kosztów utrzymania cyklicznej części zapasu (całkowity koszt zapasu cyklicznego – CKZC) w rozpatrywanym okresie (na przykład jednego roku).

$$CKZC = SKUzZC + ZKUzZC + SKUtZC + ZKUtZC$$

gdzie:

SKUzZC – stały koszt uzupełniania zapasu cyklicznego. Są to koszty niezależne od liczby dostaw w rozpatrywanym okresie. Nie zależą zatem także od wielkości pojedynczej dostawy. Są to przykładowo:

- koszty działu zaopatrzenia (zakupów), obejmujące wynagrodzenia z pochodnymi, koszty użytkowania pomieszczeń, koszty zużycia prądu, wody, itp.
- koszt utrzymania własnego taboru samochodowego, wykorzystywanego w realizacji dostaw.

$$SKUzZC = \text{const}$$

ZKUzZC – zmienny koszt uzupełniania zapasu cyklicznego. Są to koszty, które w rozpatrywanym okresie zależą od liczby do-

staw (są zatem zależne od wielkości pojedynczej dostawy). Są to, przykładowo:

- koszty składania zamówień (w tym koszty komunikacji z dostawcą, dotyczące każdego zamówienia)
- koszty zmienne transportu (zależne od liczby dostaw)
- koszty ubezpieczenia
- koszty związane z celnymi opłatami manipulacyjnymi
- koszty specjalne przyjęcia dostaw (na przykład badania laboratoryjne każdej dostawy)
- oczekiwane (przeciętne) koszty braku zapasu odniesione do jednego cyklu uzupełnienia (zależne od prawdopodobieństwa obsłużenia popytu w cyklu).

$$ZKUzZC = I_d \cdot k_{uz} = \frac{P_o}{Q} \cdot k_{uz}$$

gdzie:

- $I_d$  – liczba dostaw w rozpatrywanym okresie,
- $k_{uz}$  – koszt złożenia, realizacji i obsługi jednego zamówienia i związanej z nim dostawy (wystąpi tylko wtedy, gdy dojdzie do zamówienia i dostawy),
- $P_o$  – planowany (prognozowany) popyt w rozpatrywanym okresie,
- $Q$  – wielkość pojedynczej dostawy.

SKUtZC – stały koszt utrzymania zapasu cyklicznego. Są to koszty niezależne od wielkości zapasu, na przykład:

- amortyzacja budowli magazynowych
- amortyzacja wyposażenia magazynowego
- koszt personelu magazynowego.

$$SKUtZC = \text{const}$$

ZKUtZC – zmienny koszt utrzymania zapasu cyklicznego. Koszty te zależą od wielkości zapasu. Są to, przykładowo:

- dodatkowe (specjalne) koszty wykorzystywanej przestrzeni magazynowej (pod zapas)
- koszty naturalnych strat i ubytków magazynowych
- koszty kradzieży i innych strat

<sup>1</sup> Artykuł ten jest szóstym z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami”. W numerze 5/2008 „Logistyki” Autor zamieścił pierwszy artykuł z tego cyklu, który mówił o znaczeniu prawidłowego określenia czasu cyklu uzupełnienia. Następne artykuły z tego cyklu dotyczyły: skutków błędów popełnianych przy wyznaczaniu odchylenia standardowego popytu w cyklu uzupełnienia zapasu („Logistyka” 6/2008); skutków błędnego założenia o typie rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu („Logistyka” 1/2009); wpływu zmienności czasu cyklu uzupełnienia zapasu na poprawność wnioskowania o zależności pomiędzy zapasem zabezpieczającym, a poziomem obsługi („Logistyka” 2/2009). Kontynuację cyklu stanowił artykuł omawiający skutki błędnej interpretacji wskaźnika poziomu obsługi przy wyznaczaniu zapasu zabezpieczającego („Logistyka” 6/2010 – cz. 1 i 1/2011 – cz.2) (*przyp. red.*).

<sup>2</sup> Wzór został wyprowadzony i opublikowany przez F. W. Harrisa w 1913 r. Jest jednak bardziej znany jako wzór Wilsona. R. H. Wilson w 1934 r. opublikował artykuł, w którym przeprowadził pełną analizę zastosowań formuły na obliczanie ekonomicznej wielkości zamówienia.

- koszt ubezpieczenia zapasu
- koszt zamrożonego kapitału (koszty kredytu lub utraconych korzyści inwestycyjnych z kapitału własnego).

$$ZK_{utZC} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot k_{uto}$$

gdzie:

$Q$  – wielkość pojedynczej dostawy,  
 $k_{uto}$  – koszt utrzymania jednostki zapasu w przyjętym okresie. Dodatkowo, w uproszczeniu można przyjąć, że

$$k_{uto} = C \cdot u_o$$

$C$  – cena zakupu jednostki zapasu (lub jednostkowy koszt wytworzenia),  
 $u_o$  – okresowy współczynnik kosztu utrzymania zapasu odniesiony do tego samego okresu (np. roku), co planowany popyt.

Przy tak przyjętych założeniach ekonomiczna wielkość zamówienia określana jest znanym wzorem:

$$EWZ = \sqrt{\frac{2 \cdot P_o \cdot k_{uz}}{k_{uto}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_o \cdot k_{uz}}{C \cdot u_o}}$$

Oczywiście, zazwyczaj otrzymana wielkość jest trudna (lub niemożliwa) do praktycznej realizacji. Wynika to z różnych uwarunkowań: organizacyjnych, technicznych (na przykład minima logistyczne). Trzeba jednak pamiętać, że stosunkowo niewielkie odchylenia przyjętej (rzeczywistej) od ekonomicznej wielkości dostawy (rzędu  $\pm 10\%$ ) nie powodują znaczącego podniesienia kosztu. Dlatego, w praktyce, należy przyjąć, że obliczanie ekonomicznej wielkości zamówienia służy raczej wskazaniu zaleconego przedziału, niż dokładnej wielkości zamówienia (dostawy). Fakt ten nie zwalnia jednak ze staranności w określeniu wielkości występujących we wzorze. Dotyczy to właściwego określenia przewidywanego zapotrzebowania ( $P_o$ ), ale przede wszystkim poprawnego określenia kosztu uzupełniania (kosztu jednej dostawy), jak i jednostkowego kosztu utrzymania zapasu. Kluczowe jest tu przestrzeganie zasady, że wielkości te mogą się składać wyłącznie z kosztów zależnych (odpowiednio od: liczby dostaw i wielkości zapasu), decydujących o poziomie kosztów zmiennych.

## Wyprowadzenie wzoru na ekonomiczną wielkość zamówienia

Aby ułatwić zrozumienie poprawnego określania elementów kosztowych, a zwłaszcza zachowania zasady o uwzględnianiu wyłącznie składników determinujących koszty zmienne, trzeba przypomnieć rachunek prowadzący do formuły na ekonomiczną wielkość zamówienia. Punktem wyjścia jest funkcja przedstawiająca łączne koszty uzupełniania i utrzymania zapasu:

$$CKZC = SK_{uzZC} + \frac{P_o}{Q} \cdot k_{uz} + SK_{utZC} + \frac{1}{2} \cdot Q \cdot k_{uto}$$

Warunkiem istnienia minimum tej funkcji, przy założeniu, że wielkością zmienną jest wielkość dostawy  $Q$ , jest:

$$\begin{cases} \frac{\delta(CKZC)}{\delta Q} = 0 \\ \frac{\delta^2(CKZC)}{\delta Q^2} > 0 \end{cases}$$

(pierwsza pochodna funkcji kosztu względem wielkości dostawy musi być równa zero, a druga pochodna w punkcie optymalnym – większa od zera).

Korzystając z podstawowych wzorów rachunku różniczkowego:

$$\text{pochodna funkcji stałej: } \frac{d}{dx} c = 0$$

$$\text{pochodna funkcji odwrotnej: } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{pochodna funkcji liniowej: } \frac{d}{dx} (a \cdot x) = a$$

otrzymujemy dla pierwszego warunku:

$$\frac{\delta(CKZC)}{\delta Q} = \frac{P_o \cdot k_{uz}}{Q^2} + \frac{1}{2} \cdot k_{uto} = 0$$

Stąd, po przekształceniach:

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot P_o \cdot k_{uz}}{k_{uto}}}$$

Łatwo sprawdzić, że spełniony jest także drugi warunek istnienia minimum funkcji CKZC (dla  $Q = Q_{opt}$ ):

$$\left[ \frac{\delta^2(CKZC)}{\delta Q^2} \right]_{Q=Q_{opt}} = \frac{2 \cdot P_o \cdot k_{uz}}{Q_{opt}^3} > 0$$

## Zasady poprawnego określania elementów kosztowych ( $k_{uz}$ , $k_{uto}$ , $u_o$ ) we wzorze na ekonomiczną wielkość zamówienia

Z powyższego wyprowadzenia wynika, że zarówno w koszcie  $k_{uz}$ , jak i  $k_{uto}$  nie mogą się znajdować składniki stałe, niezależne od  $Q$ . Wszystkie bowiem stałe składowe kosztów „znikają” przy różniczkowaniu funkcji kosztu względem wielkości dostawy. Dotyczy to także wskaźnika  $u_o$ . Może on zawierać wyłącznie elementy wynikające z kosztów determinujących zmienne koszty utrzymania zapasu.

Błędem jest – na przykład – wyznaczanie kosztu związanego z realizacją jednej dostawy przez podzielenie łącznego cał-

kowitego kosztu związanego z uzupełnianiem zapasu przez łączną liczbę zamówień/dostaw w danym okresie, tak jak to przedstawiono w [1, rys. 2]. Konieczne jest wyodrębnienie tych składowych kosztów, które wpływają na zmienną część kosztów (zależną od liczby dostaw). Niech poniższy przykład będzie ilustracją tego, wspierającą przedstawiony wyżej rachunek optymalizacyjny.

Przyjmijmy bardzo prosty scenariusz:

- stałe koszty działu zamówień (koszty osobowe, użytkowanie pomieszczeń itp.) – 300 000 zł rocznie
- w poprzednim okresie (roku) zrealizowano łącznie 500 dostaw
- średni koszt złożenia każdego zamówienia – 20 zł (koszty telekomunikacyjne)
- średni koszt realizacji każdej dostawy (zewnętrzny usługodawca transportowy) – 180 zł.

Sposób A podejścia do obliczenia kosztu realizacji jednej dostawy  $k_{uz}$  służącego do obliczenia ekonomicznej wielkości dostawy

$$k_{uz-A} = \frac{300\,000 + 500 \cdot (20 + 180)}{500} = \frac{300\,000 + 100\,000}{500} = 800 \text{ zł}$$

Jeśli rozpatrujemy produkt, na który planowany popyt wynosi 40 000 sztuk, a roczny koszt utrzymania jednostki w zapasie wynosi 16 zł, to

$$EWZ_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\,000 \cdot 200}{16}} = 2000 \text{ sztuk}$$

Zapotrzebowanie zostanie zaspokojone w 20 dostawach

$$\left( \frac{40\,000}{2000} = 20 \right)$$

Sposób B oznacza uwzględnienie przy obliczaniu kosztu  $k_{uz}$  wyłącznie kosztów przyczyniających się do kosztów zmiennych.

Zatem, koszt zamówienia/dostawy

$$k_{uz-B} = 20 + 180 = 200 \text{ zł.}$$

$$EWZ_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\,000 \cdot 200}{16}} = 1000 \text{ sztuk}$$

W tym przypadku liczba dostaw jest równa 40.

Koszty zmienne uzupełniania i utrzymania zapasu dla obu przypadków wynoszą:

$$ZKZC_A = \frac{P_o}{EWZ_A} \cdot k_{uz-A} + \frac{1}{2} \cdot EWZ_A \cdot k_{uto} = 20 \cdot 200 + 1000 \cdot 16 = 20\,000 \text{ zł}$$

oraz

$$ZKZC_A = \frac{P_o}{EWZ_R} \cdot k_{uz-B} + \frac{1}{2} \cdot EWZ_B \cdot k_{uto} = 40 \cdot 200 + 500 \cdot 16 = 16\,000 \text{ zł}$$

Oczywiście, przy obliczaniu kosztu zmiennego uzupełniania zapasu dla  $EWZ_A$ , przyjęto jako koszt realizacji jednej dostawy, rzeczywisty koszt związany z jedną dostawą ( $k_{uz} = 200 \text{ zł}$ ).

Choć to tylko przykład oparty na fikcyjnych danych, nie ulega wątpliwości, że łączny koszt uzupełniania i utrzymania zapasu cyklicznego przy zastosowaniu wielkości zamówienia  $EWZ_A$  jest wyższy niż w przypadku  $EWZ_B$ . Można to także wykazać dla przypadku ogólnego.

W podobny sposób należy podejść do kalkulacji okresowego kosztu utrzymania jednostki zapasu  $k_{uto}$ . Właściwe są tu, zdaniem autora, na przykład podejścia przedstawione przez A. Weselika [2]: „dwustopniowa metoda rachunku kosztu utrzymania kosztu jednostki towaru w zapasie”, a zwłaszcza „metoda rachunku wskaźników wykorzystujących koszty zależne od wielkości dostawy”. Konieczne jest też zachowanie zasady, że w przypadku, gdy zapas ulega zmniejszeniu i zmiana ta ma charakter trwały, należy obniżyć koszty stałe (na przykład przez zmiany w zagospodarowaniu magazynu), a nie rozkładać je na mniejszą liczbę jednostek zapasu [3].

## Podsumowanie

Przedstawione rozważania wskazują na konieczność wyznaczenia dwóch kluczowych wskaźników kosztowych, występujących w klasycznej formule, na ekonomiczną wielkość zamówienia tak, aby uwzględniały tylko te składniki, które odpowiadają za koszty zmienne: uzupełniania zapasów i utrzymywania zapasów. Uwzględnienie przy ich obliczaniu kosztów stałych jest niepoprawne z formalnego punktu widzenia (wprowadza na powrót do formuły na  $EWZ$  wielkości, które jako niezależne od wielkości dostawy są eliminowane w trakcie różniczkowania funkcji kosztu całkowitego). Zastosowanie tak wyliczonej wielkości zamówienia daje wyższe koszty, niż w przypadku właściwie wyznaczonej ekonomicznej wielkości zamówienia.

## LITERATURA:

1. Weselik A., Kosztowe elementy do określenia optymalnej partii dostawy (cz. 1), „Logistyka” nr 4/2001.
2. Weselik A., Kosztowe elementy do określenia optymalnej partii dostawy (cz. 2), „Logistyka” nr 6/2001.
3. Weselik A., Jak minimalizować koszty utrzymania zapasów, „Logistyka” nr 1/2003.
4. Sariusz-Wolski Z., *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, PWE. Warszawa 2000.

W artykule z serii *Między teorią a praktyką zarządzania zapasami*, w numerze 6/2010 „Logistyki”, wzór (6) powinien mieć postać:

$$SIR = \frac{WD \cdot ld - nb \cdot ld}{WD \cdot ld} = \frac{WD - nb}{WD}$$

Za pomyłkę autor przeprasza. Jednocześnie dziękuje p. dr. inż. Józefowi Okulewiczowi za zwrócenie na nią uwagi, jak również za inne cenne komentarze do tego i kolejnego artykułu (opublikowanego w „Logistyce” 1/2011).