

Stanisław Krzyżaniak
Instytut Logistyki i Magazynowania

O skutkach błędnej interpretacji wskaźnika poziomu obsługi przy wyznaczaniu zapasu zabezpieczającego (cz. I)¹

W numerze 5/2008 „Logistyki” autor zamieścił pierwszy artykuł z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami”, który mówił o znaczeniu prawidłowego określania czasu cyklu uzupełnienia. Następne artykuły z tego cyklu dotyczyły:

- skutków błędów popełnianych przy wyznaczaniu odchylenia standardowego popytu w cyklu uzupełnienia zapasu („Logistyka” 6/2008)
- skutków błędnego założenia o typie rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu („Logistyka” 1/2009)
- wpływu zmienności czasu cyklu uzupełnienia zapasu na poprawność wnioskowania o zależności pomiędzy zapasem zabezpieczającym, a poziomem obsługi („Logistyka” 2/2009).

Niniejszy artykuł stanowi kontynuację cyklu, a jego celem jest omówienie zasadniczych różnic pomiędzy dwiema definicjami poziomu obsługi, odnoszącymi się do zarządzania zapasami i wskazania ewentualnych skutków wynikających z ich błędnej interpretacji.

Przede wszystkim należy podkreślić, że poziom obsługi może być odnoszony zarówno do pojedynczej pozycji asortymentowej, jak i grup pozycji. W pierwszym przypadku definiujemy dostępność konkretnego materiału (produktu, towaru), w drugim określamy dostępność grup (zestawów) materiałów, na przykład dla zamówień wielopozycyjnych. Przedmiotem rozważań w niniejszym artykule będzie dostępność pojedynczych pozycji asortymentowych. Dwa podstawowe wskaźniki poziomu obsługi klienta (poziomu dostępności) to: prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (POP) oraz stopień ilościowej realizacji (SIR).

Odmienność obu definicji jest wyczerpująco przedstawiona w dostępnej literaturze [na przykład 1, 3], jednak doświadczenia autora w kontaktach z przedsiębiorstwami wskazują, że nadal, bardzo często, pojęcia te nie są właściwie rozumiane i rozróżniane. Staje się to często przyczyną błędnego kształtowania zapasu zabezpieczającego i generowania niepotrzebnych kosztów.

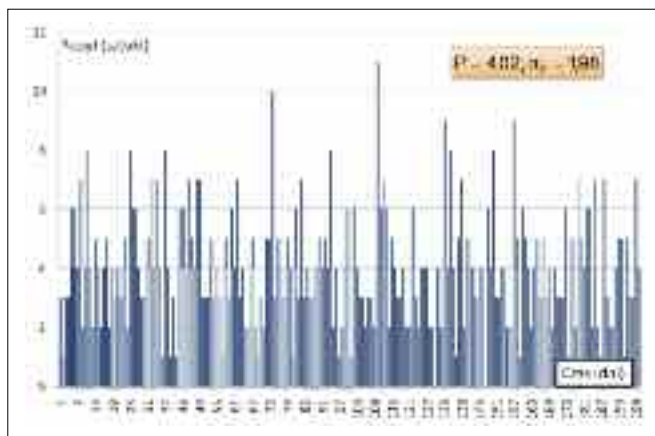
Zagadnienie zostanie przedstawione w dwóch częściach. W pierwszej (niniejszy artykuł) przedstawione zostaną szczegółowo podstawy obu definicji i zasady obliczania obu wskaźników. Zostanie to pokazane na przykładzie pozycji o niskim zapotrzebowaniu okresowym, którego rozkład można opisać rozkładem Poissona, a to dlatego, że w tym przypadku łatwiej zademonstrować istotę obliczeń. Druga część artykułu będzie dotyczyła przypadków, w których rozkład popytu odpowiada rozkładowi normalnemu, a wyniki zostaną uogólnione.

Istota wyznaczania poziomu obsługi

Jak już wspomniano, istota wyznaczania poziomu obsługi według obu podejść (definicji) zostanie pokazana na przykładzie pozycji o niskim zapotrzebowaniu okresowym, którego rozkład można opisać rozkładem Poissona. Przyjmijmy następujące dane:

- popyt roczny: 1200 sztuk przy 300 dniach operacyjnych
- rozpatrywany okres obserwacji popytu: 1 dzień stąd:
- średni popyt dzienny – $\bar{P} = 4$ sztuki
- odchylenie standardowe popytu dziennego – σ_p sztuki (dla zachowania warunku koniecznego w przypadku rozkładu Poissona – $\bar{P} = \sigma_p^2$).

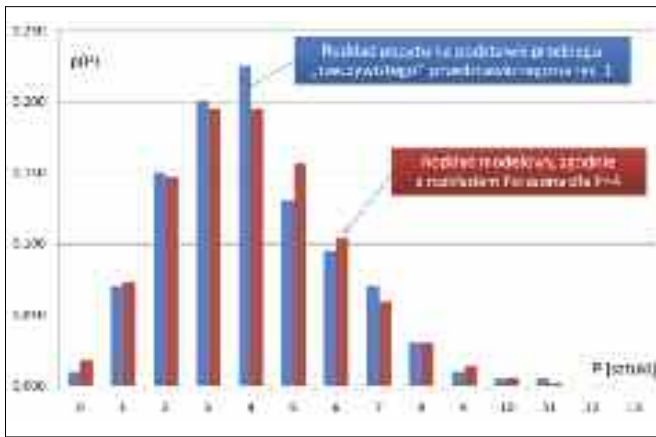
Rysunek 1 prezentuje przykładowy wykres zmian popytu w funkcji czasu, odpowiadający przyjętym parametrom. Z kolei rysunek 2 przedstawia rozkład częstości występowania poszczególnych wielkości popytu „rzeczywistego” – dla danych odpowiadających przebiegowi ilustrowanemu na rysunku 1, oraz modelowego (rozkładu Poissona odpowiadającego przyjętym parametrom).



Rys. 1. Przykład zmian popytu w czasie, stanowiący podstawę przedstawionych obliczeń.

Przyjmijmy, że zapas jest odnawiany w systemie opartym na poziomie informacyjnym (poziomie ponownego zamówienia), a czas cyklu uzupełnienia wynosi 3 dni i nie wykazuje istotnych odchyżeń ($\bar{T} = 3$; $\sigma_T \approx 0$). Jak wiadomo, kluczowe dla określania zależności pomiędzy wymaganym poziomem obsługi, a parametrem sterującym odnawianiem zapasu (tu – poziomem informacyjnym zapasu) jest wyznaczenie rozkładu popytu w cyklu

¹ Artykuł jest piątym z cyklu „Między teorią a praktyką zarządzania zapasami” (przyp. red.).



Rys. 2. Rozkład popytu (rozkład częstości) dla przebiegu przedstawionego na rysunku 1 na tle rozkładu modelowego (rozkład Poissona o średniej $P=4$).

uzupełnienia zapasu. W ogólnym przypadku opisują go parametry:

- średni popyt w cyklu uzupełnienia zapasu:

$$\bar{P}_T = \bar{P} \cdot \bar{T} \quad (1)$$

oraz

- odchylenie standardowe popytu w cyklu uzupełnienia zapasu:

$$\sigma_{PT} = \sqrt{\sigma_p^2 \cdot \bar{T} + \sigma_T^2 \cdot \bar{P}^2} \quad (2)$$

gdzie

\bar{P} – średni popyt w przyjętym okresie (tu popyt dzienny),

\bar{T} – średni czas cyklu uzupełnienia,

σ_p – odchylenie standardowe popytu w rozpatrywanym okresie,

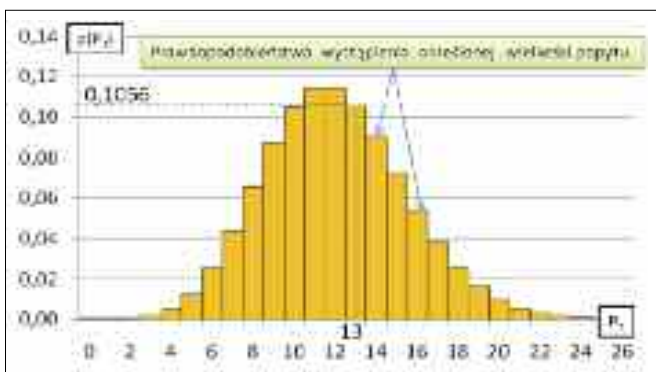
σ_T – odchylenie standardowe czasu cyklu uzupełnienia.

W rozpatrywanym przykładzie:

$$\bar{P}_T = 4 \cdot 3 = 12; \sigma_{PT} = 2 \cdot \sqrt{3} = 3,46,$$

a rozkład będzie nadal zgodny z rozkładem Poissona [2].

Rysunek 3 przedstawia rozkład częstości występowania wielkości popytu w cyklu uzupełnienia zapasu. Można z niego od-



Rys. 3. Rozkład częstości występowania poszczególnych wielkości popytu w cyklu uzupełnienia zapasu dla rozpatrywanego przykładu.

czytać, z jaką częstością (z jakim prawdopodobieństwem), mogą wystąpić poszczególne wielkości. Na przykład popyt na 13 jednostek w danym cyklu uzupełnienia wystąpi z prawdopodobieństwem $p(P_T = 13) = 0,1056$. Rysunek 3 przedstawia funkcję rozkładu prawdopodobieństwa $p(P_T)$. Popyt może w tym przypadku przyjmować wartości całkowite nieujemne (jest zmienną dyskretną). Musi oczywiście zachodzić:

$$\sum_{P_T=0}^{\infty} p(P_T) = 1 \quad (3)$$

Można sprawdzić, że istotnie zależność (3) jest w rozpatrywanym przykładzie spełniona.

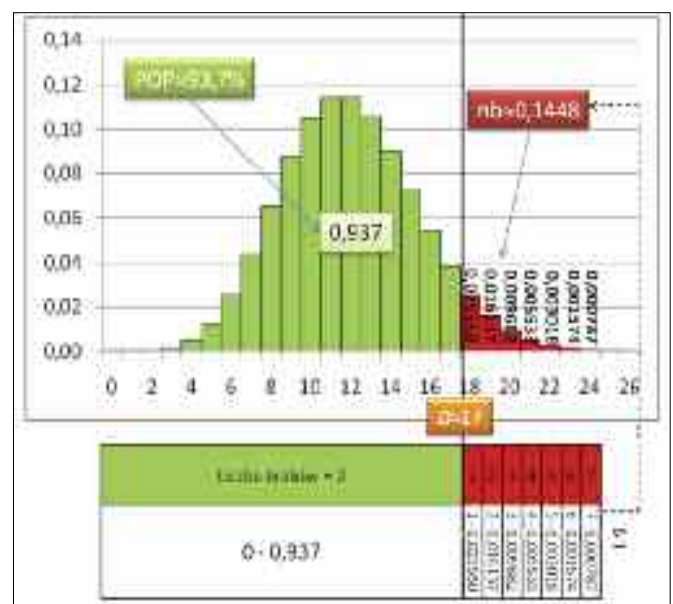
Funkcja rozkładu nie daje wprost informacji na temat poziomu obsługi. Z punktu widzenia dostępności nie jest bowiem ważne, jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia takiej czy innej wielkości popytu, ale jakie jest prawdopodobieństwo, że popyt ten nie będzie większy niż zapas posiadany w chwili rozpoczęcia cyklu uzupełnienia (Z). To prawdopodobieństwo można wyrazić następująco:

$$p(P_T \leq Z) = \sum_{P_T=0}^{P_T \leq Z} p(P_T) \quad (4)$$

Jest to suma prawdopodobieństw wyróżnionych kolorem zielonym na rysunku 4. Tak obliczone prawdopodobieństwo jest tożsame z poziomem obsługi rozumianym jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (w cyklu uzupełnienia zapasu) – POP.

Z praktycznego punktu widzenia ważne jest jednak nie tyle samo prawdopodobieństwo wystąpienia takiego zdarzenia, a raczej to, jak często mogą występować braki (a dokładniej brak zapasu w cyklu uzupełnienia). Do określenia tego konieczna jest znajomość liczby dostaw w rozpatrywanym okresie (na przykład roku). Jeśli, na przykład, przy $POP = 95\%$ liczba dostaw w ciągu roku wynosi 10, to brak w zapasie będzie się pojawiał średnio raz na 2 lata.

Dla rozpatrywanego przykładu można przyjąć, że jeśli w chwili rozpoczęcia cyklu uzupełnienia zapasu (w uproszczeniu – w chwili złożenia zamówienia) poziom zapasu jest równy 17 sztuk (dla odnawiania zapasu opartego na poziomie in-



Rys. 4. Zasada obliczania prawdopodobieństwa obsłużenia popytu (POP) oraz oczekiwanej liczby braków dla rozpatrywanego przykładu.

formacyjnym będzie to właśnie poziom informacyjny zapasu – ZI), to $POP \approx 93,7\%$. To zaś oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia braku jest równe $1-POP \approx 0,063$. Zatem brak zapasu wystąpi przeciętnie raz na $\frac{1}{0,063} = 15,87$ dostaw. Przy 30 dostawach w roku oznacza to wystąpienie braku zapasu przeciętnie blisko dwa razy w roku, przy 10 – mniej więcej raz na półtora roku.

W tabelicy 1, dla rozpatrywanego przykładu, pokazano wpływ poziomu zapasu informacyjnego (ZI) i wymaganego poziomu obsługi POP na częstość występowania braku w zapasie w zależności od wielkości dostawy i liczby dostaw w roku.

Definiowanie poziomu obsługi za pomocą wskaźnika opartego na prawdopodobieństwie (POP) jest uzasadnione szczególnie tam, gdzie konsekwencje braku zapasu (marketingowe, ekonomiczne, techniczne) wiążą się z samym faktem powstania takiego braku, a niekoniecznie z jego wielkością. Dotyczy to np. skutków zatrzymania produkcji z powodu braku części zamiennych. Jednak w wielu przypadkach liczy się liczba braków i wtedy bardziej uzasadniony jest pomiar poziomu obsługi za pomocą stopnia ilościowej realizacji – SIR:

$$SIR = \frac{P_o - NB}{P_o} \quad (5)$$

gdzie:

P_o – popyt w obserwowanym okresie (np. popyt roczny)
 NB – liczba braków w rozpatrywanym okresie.

Zakładając, że zapotrzebowanie jest pokrywane regularnymi dostawami o wielkości WD , to ich liczba będzie wynosiła,

$ld = \frac{P_o}{WD}$, a liczba braków przypadająca na jedną dostawę (na

jeden cykl uzupełnienia zapasów) będzie wynosiła $nb = \frac{NB}{ld}$.

Formuła [3] może być wtedy przedstawiona następująco:

$$SIR = \frac{WD \cdot ld - nb \cdot WD}{WD \cdot ld} = \frac{WD - nb}{WD} \quad (6)$$

Kluczowe jest zatem obliczenie oczekiwanej liczby braków. Tu znajdzie zastosowanie funkcja rozkładu prawdopodobieństwa. Zasadę obliczeń ilustruje rysunek 4.

Jeśli zapas w chwili rozpoczęcia cyklu uzupełnienia jest równy 17 sztuk ($ZI = 17$), to w przypadku gdy popyt w tym cyklu będzie mniejszy lub równy 17, liczba braków będzie równa 0. W przypadku, gdy popyt będzie równy 18 (co nastąpi z prawdopodobieństwem $p(P_T=18) = 0,02555$, liczba braków wyniesie $lb = 18 - 17 = 1$. Podobnie, jeśli popyt będzie równy na przykład 20 (co nastąpi z prawdopodobieństwem $p(P_T=20) = 0,005533$, liczba braków wyniesie $lb = 20 - 17 = 3$. Oczekiwana liczba braków nb jest sumą iloczynów liczb braków przez prawdopodobieństwo ich wystąpienia:

$$nb(ZI) = \sum lb(ZI) \cdot p(lb) = \sum_{P_T \geq ZI} (P_T - ZI) \cdot p(P_T) \quad (7)$$

$$nb(ZI) = (17 - 17) \cdot 0,038325 + (18 - 17) \cdot 0,02555 + \dots + (28 - 17) \cdot 0,00033 + \dots \approx 0,1448$$

Poziom obsługi jako stopień ilościowej realizacji (SIR) można obliczyć ze wzoru (5). Jak widać poziom ten zależy od wielkości dostawy.

I tak, można obliczyć, że dla $WD = 8$ sztuk,

$$SIR = \frac{8 - 0,1448}{8} = 98,19\%$$

$$\text{a dla } WD = 80 \text{ sztuk, } SIR = \frac{80 - 0,1448}{80} = 99,82\%$$

W tabelicy 2 pokazano wpływ poziomu zapasu informacyjnego (ZI) na poziom obsługi SIR w zależności od wielkości dostawy i liczby dostaw w roku.

Tab. 1. Wpływ poziomu zapasu informacyjnego (ZI) i poziomu obsługi POP na częstość występowania braku w zapasie w zależności od liczby dostaw w roku (wielkości dostawy) dla przedstawionego przykładu (opracowanie własne).

Wielkość dost.	B	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	
Liczba dostaw		150,0	75,0	50,0	37,5	30,0	25,0	21,4	18,8	16,7	15,0	13,6	12,5	11,5	10,7	10,0
ZI	POP															
10	34,72%	97,9	49,0	32,5	24,5	19,5	16,3	14,0	12,2	10,9	9,8	8,9	8,2	7,5	7,0	6,5
11	46,16%	80,8	40,4	26,9	20,2	15,2	13,5	11,6	10,1	9,0	8,1	7,3	6,7	6,2	5,8	5,4
12	57,60%	63,6	31,8	21,2	15,9	12,7	10,6	9,1	8,0	7,1	6,4	5,8	5,3	4,9	4,5	4,2
13	69,15%	47,6	23,9	15,9	11,9	9,6	8,0	6,8	6,0	5,3	4,8	4,3	4,0	3,7	3,4	3,2
14	77,20%	34,2	17,1	11,4	8,5	6,8	5,7	4,9	4,3	3,8	3,4	3,1	2,8	2,6	2,4	2,3
15	84,44%	23,2	11,7	7,8	5,8	4,7	3,9	3,3	2,9	2,6	2,3	2,1	1,9	1,8	1,7	1,6
16	89,87%	15,2	7,6	5,1	3,8	3,0	2,5	2,2	1,9	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
17	93,70%	9,4	4,7	3,1	2,4	1,9	1,6	1,3	1,2	1,0	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
18	96,26%	5,6	2,8	1,9	1,4	1,1	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,1	2,3	2,5	2,7
19	97,87%	3,2	1,6	1,1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1	3,4	3,8	4,1	4,4	4,7
20	98,84%	1,7	1,1	1,7	2,3	2,9	3,4	4,0	4,6	5,2	5,7	6,3	6,9	7,5	8,0	8,6
21	99,39%	1,1	2,3	3,3	4,4	5,5	6,6	7,7	8,8	9,9	11,0	12,1	13,2	14,3	15,4	16,5
22	99,70%	2,2	4,4	6,6	8,8	10,9	13,1	15,3	17,5	19,7	21,9	24,1	26,3	28,4	30,6	32,8
23	99,85%	4,5	9,1	13,6	18,1	22,6	27,2	31,7	36,2	40,7	45,3	49,8	54,3	58,8	63,4	67,9
24	99,93%	9,7	19,4	29,2	38,9	48,6	58,3	68,1	77,8	87,5	97,2	107,0	116,7	126,4	136,1	145,9
25	99,97%	21,7	43,3	65,0	86,6	108,3	130,0	151,7	173,3	195,0	216,7	238,3	259,9	281,6	303,3	324,0
26	99,987%	50,0	100,0	150,0	200,0	250,0	300,0	350,0	400,0	448,8	497,6	546,4	595,2	644,0	692,8	741,6
27	99,994%	119	238	358	478	597	716	836	955	1075	1194	1313	1433	1552	1672	1791
28	99,998%	295	590	884	1179	1474	1769	2064	2359	2654	2949	3244	3539	3834	4129	4424
29	99,999%	752	1504	2256	3008	3760	4512	5264	6016	6768	7520	8272	9024	9776	10528	11280

XX - Spodkreślana liczba i wół oznaczają zapas (w ciągu jednego roku), w braku których wystąpi brak w zapasie

Białe w zapasie wystąpi przeciętnie raz na YY lat.

Tab. 2. Wpływ poziomu zapasu informacyjnego (ZI) na poziom obsługi SIR w zależności od wielkości dostawy (liczby dostaw w roku) dla przedstawionego przykładu (opracowanie własne).

Wielkość dostawy			4	24	41	56	72	100	181	120
ZI	Liczba dostaw		150,5	33,0	30,0	21,4	16,7	15,0	12,5	10,0
	p (FF)	nb								
13	0,102570	0,04900	88,150%	96,050%	97,630%	98,307%	98,663%	98,815%	99,012%	99,210%
14	0,090439	0,03299	82,130%	87,377%	86,426%	85,076%	88,129%	89,213%	88,344%	86,470%
15	0,072331	0,40101	94,393%	94,527%	98,996%	99,283%	99,442%	99,495%	99,562%	99,665%
16	0,054293	0,24908	96,924%	98,179%	99,385%	99,561%	99,659%	99,692%	99,744%	99,796%
17	0,038135	0,14478	88,199%	99,397%	99,638%	99,741%	99,769%	99,812%	99,849%	99,876%
18	0,025530	0,08184	86,877%	98,899%	99,795%	99,854%	99,886%	99,899%	99,919%	99,932%
19	0,016137	0,04444	86,444%	89,619%	98,889%	99,921%	99,935%	99,944%	99,954%	99,963%
20	0,009682	0,02318	88,710%	89,103%	88,962%	89,261%	89,869%	89,871%	89,870%	89,861%
21	0,005833	0,01161	99,855%	99,952%	99,971%	99,979%	99,984%	99,985%	99,988%	99,990%
22	0,003078	0,00657	99,930%	99,977%	99,989%	99,990%	99,992%	99,993%	99,994%	99,995%
23	0,001574	0,00294	99,933%	99,939%	99,984%	99,985%	99,986%	99,987%	99,987%	99,985%
24	0,000787	0,00108	99,969%	99,995%	99,997%	99,998%	99,998%	99,999%	99,999%	99,999%
25	0,000378	0,00043	99,999%	99,999%	99,999%	99,999%	99,999%	99,999%	100,000%	100,000%
26	0,000174	0,00014	99,999%	99,999%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%

Porównując wartości obu wskaźników poziomu obsługi (POP – tablica 1 i SIR – tablica 2) można zauważyć, że dla tych samych warunków (tu, przy tym samym poziomie informacyjnym i wielkości/liczbie dostaw) wskaźnik prawdopodobieństwa POP jest zawsze mniejszy od wskaźnika ilościowego SIR. Jednocześnie, na podstawie tablic 1 i 2 można zaobserwować skutki błędnej interpretacji definicji poziomu obsługi. Załóżmy, że przedsiębiorstwo zamierza (dla rozpatrywanego przykładu) zapewnić poziom obsługi SIR = 99,5% (niezrealizowane wydania na poziomie 0,5% całkowitego rocznego zapotrzebowania). Przyjmijmy, że ustalona wielkość dostawy wynosi 56 sztuk. Z tablicy 2 można odczytać, że zamówienie powinno być składane przy poziomie 16 sztuk (ZI=16). Błędna interpretacja wskaźnika poziomu obsługi i przyjęcie go jako prawdopodobieństwo obsłużenia popytu (POP=99,5%), spowoduje, że wymagany poziom zapasu zostałby ustalony na poziomie 22 jednostek (tablica 1). Oznacza to nadmiar 6 jednostek w zapasie. Oczekiwany stopień ilościowej realizacji dla tego poziomu zapasu informacyjnego (tablica 2) jest równy 99,986%. Praktyka pokazuje, że zaobserwowanie faktu zawyżenia poziomu obsługi SIR ponad oczekiwany jest bardzo trudne, a właściwie niemożliwe. Powoduje to utwierdzenie w przekonaniu, że zapas zabezpieczający został prawidłowo wyznaczony.

Sytuacja odwrotna (zdarzająca się jednak w praktyce nieporównanie rzadziej), to znaczy przy wymaganym poziomie obsługi w ujęciu probabilistycznym (na przykład POP = 99,5%), wyznaczanie zapasu zabezpieczającego (lub informacyjnego) według podejścia ilościowego, skutkuje zaniżeniem poziomu obsługi. Przy wielkości dostawy – podobnie jak wyżej – również 56 sztuk, z tablicy 2 odczytamy ZI = 16 sztuk. Tymczasem, dla tego poziomu zapasu, w rozpatrywanym przykładzie, POP = 89,87%. Można obliczyć, że w takim przypadku braki w zapasie będą się pojawiały w przybliżeniu 20 razy częściej (!), a to już widoczna różnica.

Podsumowanie

Podsumowując rozważania przedstawione w I części artykułu należy wskazać następujące kwestie:

1. Poziom obsługi definiowany: probabilistycznie (prawdopodobieństwo obsłużenia popytu w danym cyklu odnowienia zapa-

su – POP) i ilościowo (stopień ilościowej realizacji w rozpatrywanym okresie – SIR), mimo, że wyrażane w podobny sposób – procentowo, w przedziale <0%; 100%), różnią się zasadniczo.

2. Dla określenia prawdopodobieństwa obsłużenia popytu, przy znanym odchyleniu standardowym popytu w cyklu uzupełnienia zapasu wystarczy znajomość zapasu informacyjnego (w systemie opartym na poziomie informacyjnym) lub tak zwanego zapasu maksymalnego (w systemie przeglądu okresowego). Określenie stopnia ilościowej realizacji wymaga dodatkowo znajomości wielkości dostawy (liczby dostaw w przyjętym okresie).
3. Błędna interpretacja założeń co do sposobu definiowania poziomu obsługi, skutkująca przyjęciem niewłaściwej definicji i – co za tym idzie – niewłaściwego algorytmu obliczeń skutkuje albo zaniżeniem pożądanego poziomu obsługi, albo (co częstsze, a jednocześnie trudniejsze do zidentyfikowania) niepotrzebnym zawyżeniem poziomu informacyjnego zapasu i tym samym utrzymywaniem zapasu nadmiernego.
4. W niniejszym artykule omawiane kwestie zostały, dla łatwiejszego zademonstrowania różnic w podejściu do obu sposobów definiowania poziomu obsługi, przedstawione na przykładzie pozycji wolno rotującej, dla której rozkład popytu można opisać rozkładem Poissona. Druga część artykułu („Logistyka” 1/2011) obejmie zasady obliczeń oraz porównania obu wskaźników poziomu obsługi dla rozkładu normalnego, sprawdzającego się w przypadku pozycji szybko rotujących i – co ważne – stosowanego powszechnie w różnego typu aplikacjach i systemach informatycznych wspomagających zarządzanie zapasami. Przedstawione zostaną – w postaci uogólnionej – skutki błędnego interpretowania obu definicji poziomu obsługi.

BIBLIOGRAFIA:

1. Krzyżaniak S., *Poziom obsługi w gospodarce zapasami*, „Logistyka” 1/2003.
2. Krzyżaniak S., *O skutkach wynikających z błędnego założenia o typie rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu*, „Logistyka” 1/2009.
3. Ronald S. Tibben-Lembke, *Setting Safety Stock Using a Fill Rate*, University of Nevada, Reno, April 27, 2009 (<http://www.business.unr.edu/faculty/rtl/463/FillRate.pdf>).