Stanisław Krzyżaniak
Instytut Logistyki i Magazynowania.

Między teorią a praktyką zarządzania zapasami (cz. 3)

O skutkach wynikających z błędnego założenia o typie rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu[1]

Artykuł jest kolejnym z cyklu prezentującego typowe błędy, popełniane przy wyznaczaniu parametrów podstawowych systemów odnawiania zapasów i skutków, jakie te błędy niosą dla dotrzymania założonych poziomów dwóch kluczowych wskaźników oceny: poziomu obsługi i kosztów.

Tym razem przyjrzymy się skutkom błędnych założeń odnośnie typu rozkładu prawdopodobieństwa popytu w cyklu uzupełnienia zapasu. Popyt jest traktowany jako zmienna losowa, a znajomość jego rozkładu i parametrów tego rozkładu stanowi podstawę wyznaczania relacji: zapas zabezpieczający – poziom obsługi (prawdopodobieństwo obsłużenia popytu). Relacje te można wyrazić dwojako:

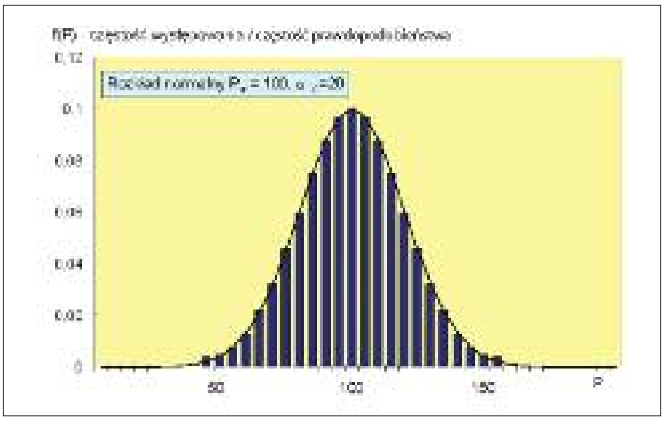
- określając oczekiwany poziom obsługi (prawdopodobieństwo obsłużenia popytu) przy znanym poziomie zapasu zabezpieczającego
- wyznaczając niezbędny poziom zapasu zabezpieczającego dla zapewnienia wymaganego poziomu obsługi.

W praktyce rozkład popytu przedstawia się za pomocą funkcji rozkładu. W przypadku, gdy wielkości popytu należą do zbioru liczb całkowitych nieujemnych {0; 1; 2; 3, ….}, funkcję tę nazywamy także funkcją masy prawdopodobieństwa (*wystąpienia popytu*). Rozkład tego typu znajdzie zastosowanie na przykład w przypadku popytu na pozycje sztukowe, zwłaszcza wolno rotujące (na przykład części zamienne). W przypadku funkcji ciągłych, a więc wtedy, gdy popyt może przyjmować dowolne wielkości, mówimy o funkcji gęstości prawdopodobieństwa (*wystąpienia popytu*).

Rozkłady popytu obserwowanego w przyjętej jednostce czasu

Jak już wspomniano wyżej, dla wyznaczenia relacji pomiędzy zapasem zabezpieczającym a poziomem obsługi, konieczna jest znajomość rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu, a więc w okresie pomiędzy wystąpieniem potrzeby odnowienia zapasu, a momentem udostępnienia zapasu do wykorzystania (przetworzenia, sprzedaży). W praktyce rozkład ten jest określany na podstawie znajomości rozkładu popytu w przyjętej jednostce czasu, w której prowadzona jest obserwacja i rejestracja popytu (popyt dzienny, tygodniowy, miesięczny) i czasu cyklu uzupełnienia – jego wartości średniej i odchylenia standardowego (w ujęciu najogólniejszym – funkcji rozkładu tego czasu). Zatem punktem wyjścia i warunkiem prawidłowości obliczeń odniesionych do popytu w cyklu uzupełnienia jest poprawne określenie rozkładu popytu w przyjętym okresie obserwacji. Zazwyczaj wyróżnia się trzy podstawowe rozkłady, znajdujące zastosowanie przy analizie popytu [3]:

1. Rozkład normalny, stanowiący dobry opis rozkładu popytu na pozycje szybko rotujące, klasyfikowane (w ramach klasyfikacji XYZ) w grupie X, a także czasami w Y – przy większych wartościach współczynnika zmienności,
2. Rozkład Poissona, stosowany głównie do opisu rozkładu popytu pozycji raczej wolno rotujących (grupy Y i Z), o wielkościach będących nieujemnymi liczbami całkowitymi. Warunkiem możliwości jego stosowania jest następująca zależność pomiędzy wartością średnią popytu $P_{śr}$, a odchyleniem standardowym σ_P: $P_{śr} \approx \sigma_P^2$,
3. Rozkład wykładniczy, odpowiedni do opisu rozkładu popytu pozycji wolno rotujących (grupa Z), w przypadku gdy $P_{śr} \approx \sigma_P$.

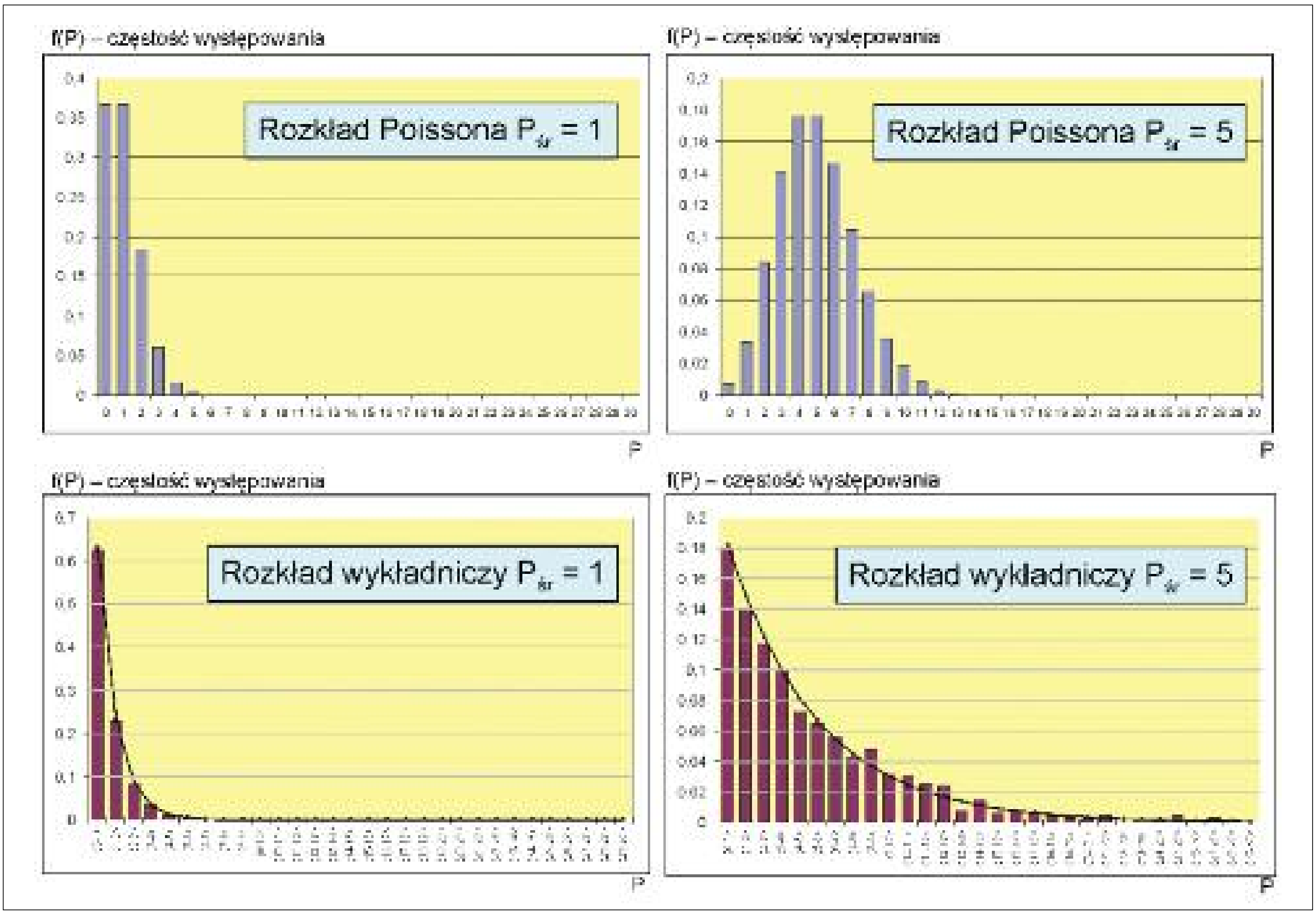


Rys. 1. Przykład rozkładu popytu zgodnego z rozkładem normalnym.

Rysunek 1 przedstawia przykład rozkładu popytu zgodnego z rozkładem normalnym, a rysunek 2 porównuje rozkłady Poissona i wykładniczy. Rysunek 2 pokazuje, że o ile profil rozkładu Poissona zmienia swój kształt ze wzrostem wielkości średniej, to zasadniczy kształt profilu rozkładu wykładniczego pozostaje niezmieniony

Rysunki 1 i 2 pokazują wyraźnie, że rozkład normalny nie będzie stanowił dobrego opisu rozkładu popytu pozycji wolno rotujących. Jedynie w przypadku rozkładu Poissona, przy nieco większych wielkościach popytu, profil rozkładu wykazuje pewną zbieżność z modelowym rozkładem normalnym.

[1] Artykuł recenzowany (*przyp. red.*).



Rys. 2. Porównanie rozkładów: Poissona i wykładniczego dla dwóch rożnych wielkości popytu średniego (Pśr = 1,0 i Pśr = 5,0).

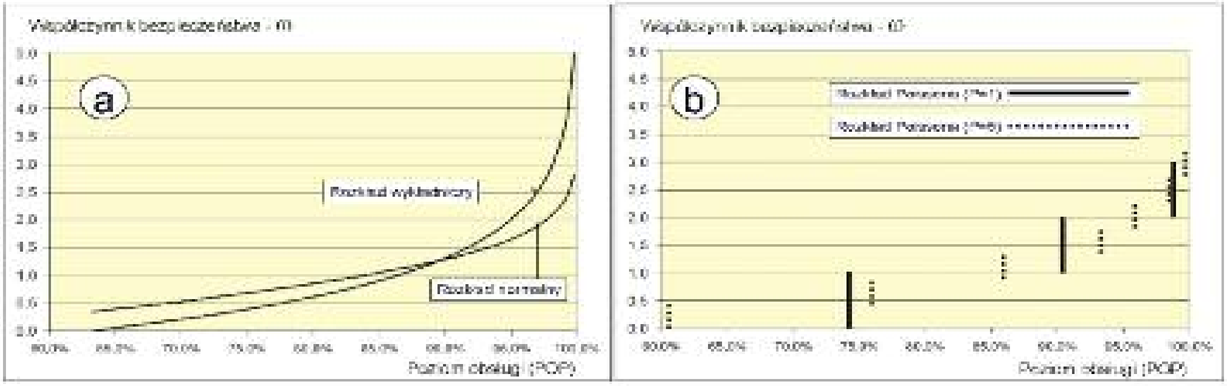
Rozkłady popytu w cyklu uzupełnienia zapasu

Ponieważ dla określenia relacji pomiędzy poziomem obsługi, a zapasem zabezpieczającym konieczna jest znajomość rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu, szczególna uwaga powinna zostać zwrócona na poprawność przyjmowania opisującego rozkładu teoretycznego właśnie dla rozkładu tego popytu. Rozkład ten stanowi w istocie rozkład będący sumą rozkładów odniesionych do przyjętej jednostki czasu. Liczba tych składowych rozkładów odpowiada czasowi cyklu uzupełnienia T i – w ogólnym przypadku – nie musi być liczbą całkowitą. Podstawowym pytaniem – w warstwie teoretycznej – jest: jak wygląda rozkład będący taką suma rozkładów i jakie są jego parametry? W tabeli 1 przedstawiono tę kwestię dla wyróżnionych wyżej trzech typowych rozkładów. Z przedstawionych w tablicy zależności widać, że w przypadku rozkładu popytu zgodnego z rozkładem normalnym i Poissona, rozkład popytu w cyklu uzupełnienia pozostaje takim samym rozkładem – odpowiednio: normalnym i Poissona. Jednak w przypadku rozkładu wykładniczego suma rozkładów wykładniczych jest rozkładem gamma [1, 2]. Założenie, że rozkład popytu w cyklu uzupełnienia zapasu jest tu nadal zgod-

Tab. 1. Modele rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu w zależności od „wyjściowych" modeli rozkładu popytu odniesionego do przyjętej jednostki czasu obserwacji (na podstawie [2])

Rozkład popytu odniesionego do przyjętej jednostki czasu obserwacji (np. godziny, dni, tygodnie, miesiące)	**Rozkład popytu w cyklu uzupełnienia zapasu o czasie trwania - T**
Rozkład normalny o parametrach: $P_{śr}$ – średni popyt σ_P – odchylenie standardowe popytu	**Rozkład normalny** o parametrach: - popyt średni: $P_{T_śr} = P_{śr} \cdot T$ - odchylenie standardowe: $\sigma_{PT} = \sigma_P \cdot \sqrt{T}$ *
Rozkład Poissona - o średniej popytu $P_{śr}$ - odchylenie standardowe popytu jest równe: $\sigma_P = \sqrt{P_{śr}}$	**Rozkład Poissona:** - o średniej popytu $P_{T_śr} = P_{śr} \cdot T$, - odchylenie standardowe $\sigma_{PT} = \sqrt{P_{śr} \cdot T} = \sigma_P \cdot \sqrt{T}$
Rozkład wykładniczy o parametrze λ, z wartości którego wynikają: - popyt średni - $P_{śr} = \frac{1}{\lambda}$ - odchylenie standardowe popytu - $\sigma_P = \frac{1}{\lambda}$	**Rozkład gamma** o parametrach: λ, T, - o wartości średniej $P_{T_śr} = \frac{T}{\lambda} = P_{śr} \cdot T$ - odchylenie standardowe: $\sigma_{PT} = \frac{\sqrt{T}}{\lambda} = \sigma_P \cdot \sqrt{T}$

* w ogólnym przypadku, uwzględniającym także losową zmienność czasu T, wyrażoną odchyleniem standardowym σ_T, odchylenie standardowe popytu w cyklu uzupełnienia zapasu wyraża się formułą: $\sigma_{PT} = \sqrt{\sigma_P^2 \cdot T + \sigma_T^2 \cdot P_{śr}^2}$. Wzór przedstawiony w tablicy 1 jest jej szczególnym przypadkiem.



Rys. 3. Zależność współczynnika bezpieczeństwa ω od poziomu obsługi (prawdopodobieństwa obsłużenia popytu) dla rozkładów normalnego i wykładniczego (a) oraz Poissona, dla dwóch różnych wielkości popytu średniego (b).

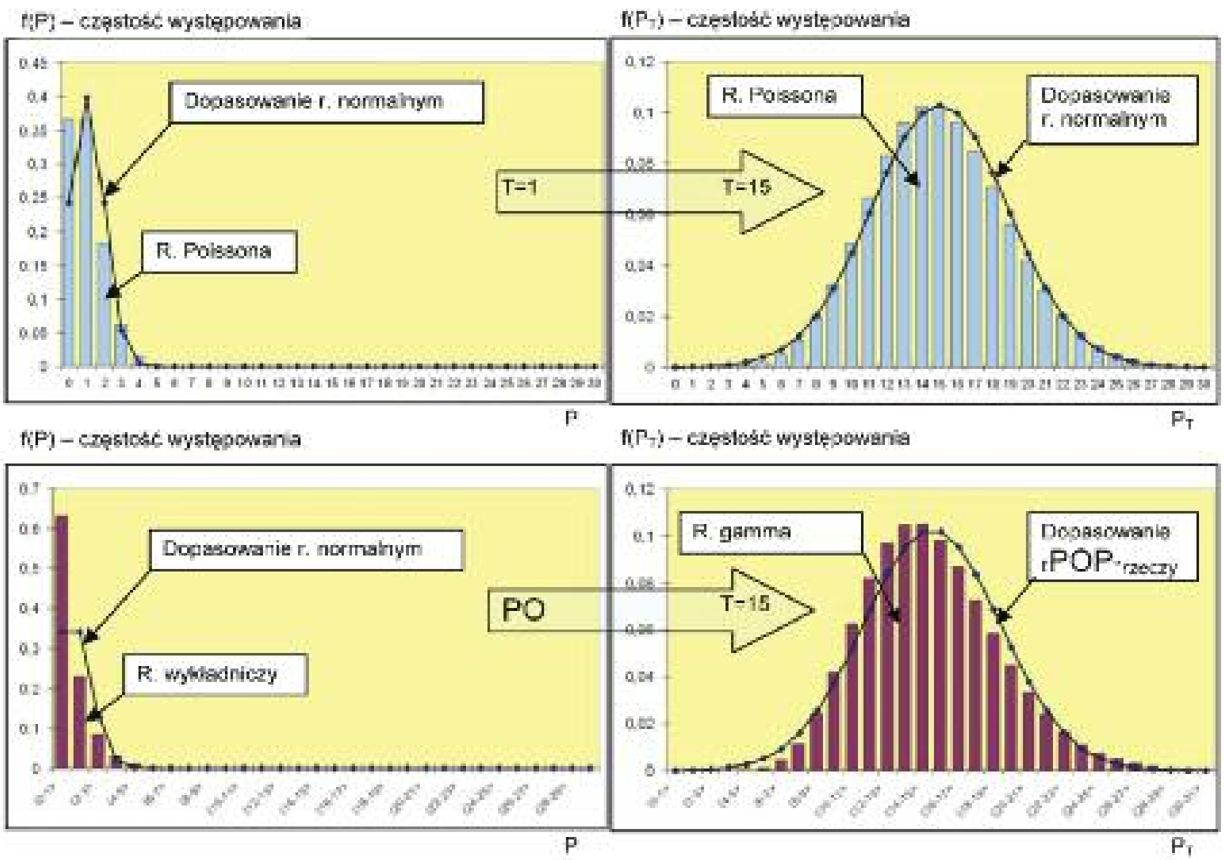
ny z wykładniczym o parametrze prowadzi do istotnych błędów w ocenie oczekiwanego poziomu obsługi.

Oczywiście, idealnym rozwiązaniem przy prowadzeniu analiz związanych z określaniem zapasu zabezpieczającego jako funkcji poziomu obsługi, byłoby stosowanie dla każdej pozycji asortymentowej właściwego dla niej teoretycznego rozkładu popytu. Przypomnijmy, że zależność ta ma postać:

$$ZB = \omega \cdot \sigma_{PT} \,.$$

Współczynnik bezpieczeństwa ω jest zależny: od poziomu obsługi (prawdopodobieństwa obsłużenia popytu) oraz typu rozkładu (rysunek 3).

Niestety, bardzo często do obliczeń dla wszystkich pozycji asortymentowych wykorzystuje się – niezależnie od rzeczywistego typu rozkładu ich popytu – współczynniki ω wynikające z rozkładu normalnego. Oznacza to w istocie założenie, że rozkłady popytu tych pozycji można opisać rozkładem normalnym. Ilustruje to rysunek 4. Można z niego wyciągnąć dwa wnioski:



Rys. 4. Ilustracja zmiany postaci rozkładów popytu zgodnych z rozkładami Poissona i wykładniczego o tej samej wielkości średniej popytu (Pśr = 1) dla jednostkowego czasu obserwacji, przy przejściu do rozkładu w cyklu uzupełnienia zapasu dla T=15, z próbą dopasowania rozkładem normalnym.

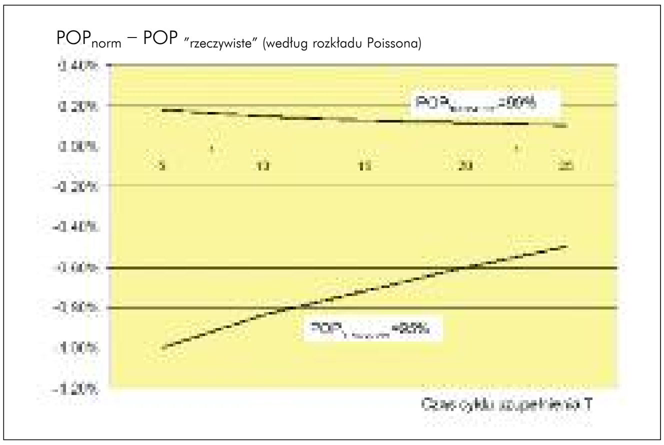
- lepsze dopasowanie rozkładem normalnym można uzyskać dla rozkładu Poissona, niż dla rozkładu wykładniczego
- dopasowanie obu rozkładów rozkładem normalnym generalnie jest znacznie lepsze w przypadku, gdy mamy do czynienia z dłuższymi czasami cyklu uzupełnienia (większą liczbą sumowanych rozkładów odniesionych do przyjętej jednostki czasu).

Dopuszczalność opisu rozpatrywanego rozkładu rozkładem teoretycznym (ogólniej – jakość dopasowania) można zbadać jednym z ogólnie znanych testów istotności „zgodności" (na przykład testu Kołmogorowa) [1]. Poniżej, w punktach 3 i 4 przedstawiono wyniki porównań poziomu obsługi (prawdopodobieństwo obsłużenia popytu – POP) w przypadku zastosowania do opisu rozkładu popytu – jako uniwersalnego – rozkładu normalnego.

Ocena dopuszczalności zastosowania modelu rozkładu normalnego dla rozkładów zgodnych z rozkładem Poissona

Rysunki 5 i 6 pokazują różnice pomiędzy poziomami obsługi: oczekiwanym w wyniku przyjęcia do opisu rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu rozkładu normalnego i wynikającym z rozkładu „rzeczywistego", zgodnego z rozkładem Poissona.

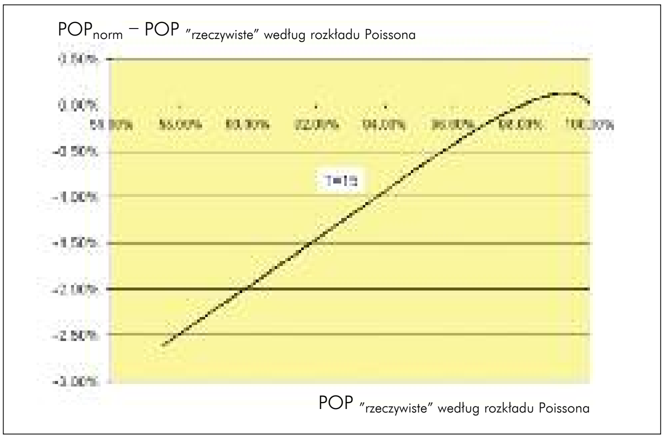
Rysunek 5 przedstawia te różnice dla przypadku, w którym czas cyklu uzupełnienia wynosi 15 jednostek (na przykład tygodni), przy założeniu, że popyt odniesiony do przyjętej jednostki czasu (na przykład popyt tygodniowy) jest zgodny z rozkładem Poissona o średniej $P_{śr} = 1$. Z rysunku można przykładowo odczytać, że w przypadku, gdy „rzeczywisty" poziom obsługi jest równy 90%, to zastosowanie rozkładu normalnego będzie wskazywało około 2% mniej, czyli około 88%. Dla 95% będzie to około 94,3%. Z rysunku 6 widać, że odchylenia te będą tym mniejsze, im wyższy jest „rzeczywisty" poziom obsługi i im większe są wielkości średniego popytu w cyklu uzupełnienia zapasu (czyli – w tym przypadku – im dłuższy jest czas cyklu uzupełnienia). Warto zauważyć, że w przypadku, gdy badane różnice są ujemne, może nastąpić niepotrzebne zawyżenie zapasu zabezpieczającego (dodawanie zapasu kompensującego tą pozorną różnicę). Dodatnie wartości mierzonych różnic mogą skłaniać do zmniejszania zapasu zabezpieczającego, czego wynikiem będzie mniejszy, od założonego, rzeczywisty poziom obsługi.



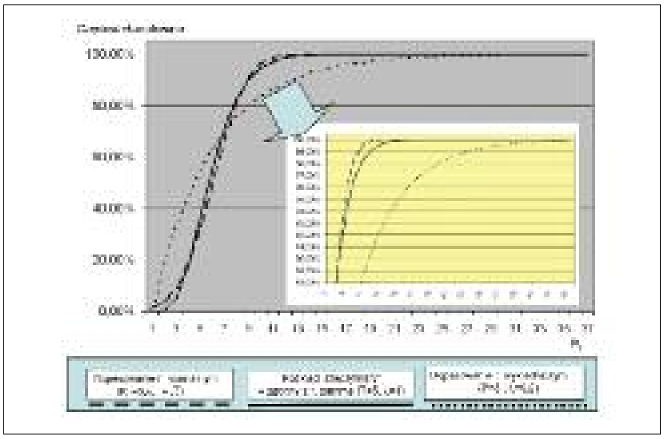
Rys. 6. Odchylenia poziomu obsługi (POP) oczekiwanego wskutek przyjęcia rozkładu normalnego, jako dopasowania do rozkładu rzeczywistego, zgodnego z rozkładem Poissona w funkcji czasu cyklu uzupełnienia T (pozostałe dane jak na rys. 5).

Ocena dopuszczalności zastosowania modelu rozkładu normalnego dla rozkładów zgodnych z rozkładem gamma

Rysunek 7 ilustruje błędy wynikające z przyjęcia założenia, że przy dłuższych cyklach odnawiania zapasu nadal obowiązuje rozkład wykładniczy, jeśli był on właściwy w przypadku rozkładu popytu obserwowanego w jednostkowym okresie czasu (zazwyczaj znacznie krótszym od czasu cyklu T). Rysunek ten przedstawia przebiegi dystrybuanty (funkcji częstości skumulowanej/prawdopodobieństwa skumulowanego), która określa zależność współczynnika bezpieczeństwa od poziomu obsługi. Nawet jakościowa ocena przebiegów: „rzeczywistego" (zgodnego z rozkładem gamma) i wy-

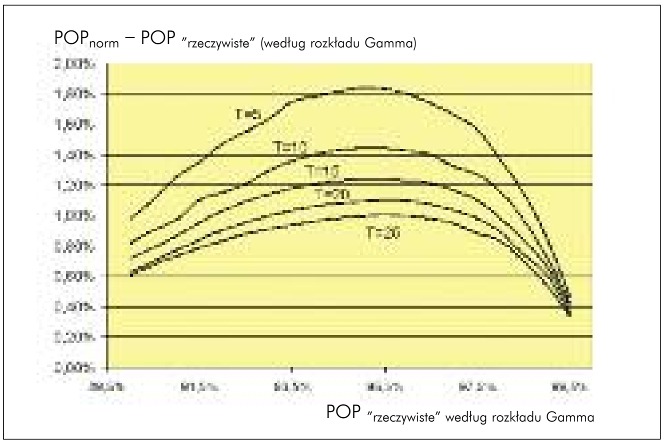


Rys. 5. Odchylenia poziomu obsługi (prawdopodobieństwa obsłużenia popytu – POP) oczekiwanego wskutek przyjęcia rozkładu normalnego jako dopasowania do rozkładu rzeczywistego zgodnego z rozkładem Poissona; rozkład „wyjściowy", jak na rys. 2 ($P_{śr} = 1$), czas cyklu uzupełnienia T = 15.



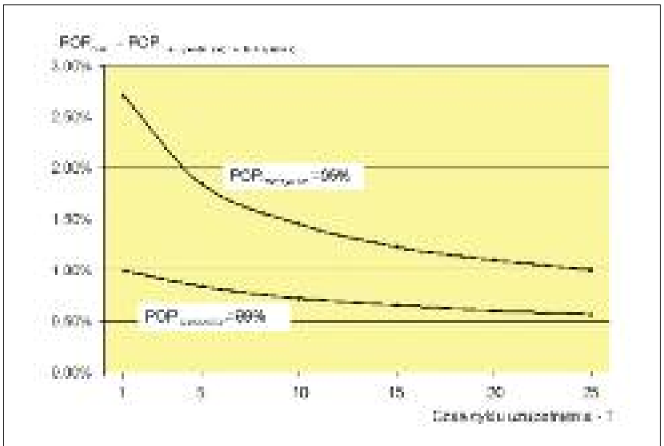
Rys. 7. Porównanie przebiegu funkcji częstości skumulowanej dla – traktowanego jako rzeczywisty – rozkładu gamma, wynikającego z rozkładu „wyjściowego" (rozkład wykładniczy o średnim popycie $P_{śr} = 1$, jak na rys. 2) dla T = 5, z jego dopasowaniami: rozkładem normalnym i rozkładem wykładniczym o $P_{śr} = 5$.

kładniczego pokazuje, że przyjęcie rozkładu wykładniczego skutkowałoby bardzo dużymi błędami (znacznym zawyżaniem zapasu zabezpieczającego). Rysunek pokazuje także, że w takim przypadku – jeśli nie ma możliwości zastosowania rozkładu gamma, lub dla uproszczenia obliczeń – można rozważyć zastosowanie rozkładu normalnego. Rysunki 8 i 9 pokazują różnice pomiędzy poziomami obsługi: oczekiwanymi w wyniku przyjęcia do opisu rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu rozkładu normalnego i rzeczywistego, zgodnego z rozkładem gamma.



Rys. 8. Odchylenia poziomu obsługi (prawdopodobieństwa obsłużenia popytu – POP) oczekiwanego wskutek przyjęcia rozkładu normalnego, jako dopasowania do rozkładu rzeczywistego, zgodnego z rozkładem gamma, dla różnych czasów cyklu uzupełnienia; rozkład „wyjściowy", to rozkład wykładniczy jak na rys. 2 ($P_{śr}$ = 1).

Z rysunków 8 i 9 wynika, że odchylenia oczekiwanego (wynikającego z dopasowywania rozkładu rzeczywistego rozkładem normalnym) od rzeczywistego poziomu obsługi (wynikającego z „rzeczywistego" rozkładu, zgodnego z rozkładem gamma) są – w tych samych warunkach – większe, niż w przypadku rozkładu Poissona. Odchylenia te mają znak dodatni. Jak wspomniano wcześniej, oznacza to, że zastosowanie rozkładu normalnego sugeruje większe poziomy poziomu obsługi. Nie uwzględnienie tego faktu i wprowadzenie korekt polegających na odpowiednim zmniejszeniu zapasu zabezpieczającego, będzie skutkować zmniejszeniem rzeczywistego poziomu obsługi. Szczególnie duże odchylenia obserwuje się w przedziale 92% – 98% (rysunek 8). Podobnie, jak w przypadku odchyleń poziomu obsługi przy dopasowaniu rozkładem normalnym rozkładu Poissona, wielkości odchyleń maleją ze wzrostem czasu cyklu uzupełnienia (rysunek 9).



Rys. 9. Odchylenia poziomu obsługi (POP) oczekiwanego wskutek przyjęcia rozkładu normalnego, jako dopasowania do rozkładu rzeczywistego, zgodnego z rozkładem gamma w funkcji czasu cyklu uzupełnienia T (pozostałe dane jak na rys. 8).

Podsumowanie

Bardzo często, przy obliczeniach związanych z wyznaczaniem poziomu zapasu zabezpieczającego, zależnego od wymaganego poziomu obsługi, wykorzystuje się współczynniki bezpieczeństwa wynikające z funkcji skumulowanego prawdopodobieństwa rozkładu normalnego, niezależnie od rzeczywistego rozkładu popytu, a więc także dla pozycji wolno rotujących, dla których bardziej właściwe byłyby rozkłady: Poissona lub wykładniczy.

Kwestia właściwego doboru modelu rozkładu jest szczególnie istotna dla rozkładu popytu w cyklu uzupełnienia zapasu. Ten rozkład ma bowiem decydujące znaczenie dla prawidłowego określania zależności pomiędzy poziomem obsługi a zapasem zabezpieczającym.

Jeśli rozkład popytu dla przyjętej jednostki czasu obserwacji jest zgodny z rozkładem normalnym, to rozkład popytu w czasie cyklu uzupełnienia (przy założeniu stałości czasu trwania cyklu) jest również zgodny z rozkładem normalnym (choć o odpowiednio innych parametrach – patrz tabela 1). Podobna prawidłowość będzie miała miejsce w przypadku rozkładu Poissona. W przypadku, gdy rozkład popytu dla przyjętej jednostki czasu obserwacji jest zgodny z rozkładem wykładniczym, rozkład popytu w czasie cyklu uzupełnienia (przy założeniu stałości czasu trwania cyklu) jest zgodny z rozkładem gamma.

Zastosowanie rozkładu normalnego, jako uniwersalnego, do opisu rozkładów zgodnych z rozkładem Poissona i gamma, jest źródłem błędów w ocenie poziomu obsługi, a w konsekwencji, w wyznaczanym poziomie zapasu zabezpieczającego. Odchylenia te są tym mniejsze, im wyższy jest wymagany poziom obsługi (powyżej 99%) oraz im dłuższy jest cykl uzupełnienia zapasów.

Jak już wskazano, powyższe rozważania były prowadzone przy założeniu stałości czasu cyklu uzupełnienia T ($\sigma_T \approx 0$). W kolejnym artykule z tego cyklu przedstawione zostaną symulacje przedstawiające wpływ zmienności czasu cyklu uzupełnienia na kwestie związane z doborem rozkładu teoretycznego, a także kształtowaniem poziomu obsługi.

LITERATURA:

1. Bartosiewicz J., *Wykłady ze statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Wydanie drugie poprawione, Warszawa 1996.
2. Benjamin Jack. R., Cornell C. Allin, *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1977.
3. Sarjusz-Wolski Z., *Sterowanie zapasami w przedsiębiorstwie*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000.